分类号：O532　　单位代码：10335

密　级：非涉密　　申 请 号：11206013

浙江大学

博士学位论文

中文论文题目：托卡马克边界微观湍流的数值模拟

2015/09/18 00:43

英文论文题目：**Numerical Simulations of Micro-turbulence in Tokamak Edge**

申请人姓名：谢华生

指导教师：肖湧　教授

专业名称：等离子体物理

研究方向：磁约束聚变

所在学院：理学院

论文提交日期　2015年7月15日

托卡马克边界微观湍流的数值模拟

论文作者签名：谢华生

指导教师签名：

论文评阅人1：

评阅人2：

评阅人3：

评阅人4：

评阅人5：

答辩委员会主席：

委员1：

委员2：

委员3：

委员4：

委员5：

委员6：

答辩日期：2015.09.08

Numerical Simulations of Micro-turbulence in Tokamak Edge

Author's signature: **Hua-sheng XIE**

Supervisor's signature: **Yong XIAO**

External Reviewers: _____

_____

_____

_____

_____

Examining Committee Chairperson:

Zhi-wei MA

Examining Committee Members:

Yong XIAO

Wen-lu ZHANG

Min XU

Xiang GAO

Kai WANG

Zheng-mao SHENG

Date of oral defence: 2015.09.08

浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得浙江大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：谢华生　　签字日期：2015 年 9 月 8 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解浙江大学有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权浙江大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：谢华生　　导师签名：

签字日期：2015 年 9 月 8 日　　签字日期：2015 年 09 月 08 日

致　　谢

时光荏苒，自二〇〇六年九月踏入浙大，从本科到现在已是九年，是离开的时候了。谨在此衷心感谢关心和帮助过我的老师、同学、朋友和家人!

这几年合作最多也最有成效的是肖湧博士，这篇学位论文的主要内容也是与他合作产生的。这几年对我的思维影响最深的是陈骝教授和Fulvio Zonca博士，其影响可能是一生的。与马志为教授和董家齐教授的合作也是令人愉快的，从他们身上也学到不少技能。同时非常感谢郁明阳教授学术写作的帮助。盛正卯教授是我本科入门等离子体物理的引路人。从其他前辈的短暂合作或者讨论交流中也学到许多东西，包括王晓钢教授、林留玉仁教授、林志宏教授、傅国勇博士和林郁博士。林志宏老师在我这篇博士论文中起到重要作用。自己在阿尔芬本征模方面的工作从傅国勇老师那获益良多。与秦宏博士、徐学桥博士、陈杨博士、Bruce Scott博士及Patrick H. Diamond的交流讨论也令我受益不少。

陈伟和祝佳是同辈中我遇到的最好的合作者，他们恰恰在我不擅长或无耐心或直接忽略的地方做的非常之好。感谢许多与我分享知识的师兄、师姐、师弟及师妹或同行：仇志勇、Andreas Bierwage、冯智晨、卢志鑫、齐龙瑜、王鑫、刘东剑、王璐、申伟、王胜、虞立敏、胡友俊、马瑞瑞、陈昊天、郝广周、刘健、叶磊、邹丹旦、沈勇、曲鸿鹏、石中兵、刘阳青、谢涛、毛傲华、崔少燕、黄凤、陈玲、Maxime Lesur、孙有文、汪学毅。与其他许多人的讨论交流也是有启发性的：科大徐颖峰、黄文龙，西南所何宏达、王灏，大连理工王辉辉、魏来、王先驱，北大张瑞斌、陈炎高、马晨昊、胡地、赵登、贾青、孙传奎，华科胡启明，等离子体所陈佳乐、孔德峰、李德徽、张洪明、王军，南华大学李景春、路兴强，PPPL石磊、刘畅、周尧，及Emily Belli、Alessandro Biancalani、Ilija Chavdarovski、李博、朱建州、郑林锦，等。

这篇论文还需特别感谢：UCI的Ihor Holod、王直轩、邓文隽、Daniel Fulton和Joseph McClenaghan；北大的张桦森、包健、廖秀秀和刘雅琪；同组的师弟张泰格、赵忱和魏西硕；物理所张文禄老师组的张晨曦和成俊义。及，天河一号超算中心的赵洋。

再感谢聚变中心曾经一起成长的李振乾、周旭、张文敏、刘盼盼、李灵杰、王理程、张熙、赵典、田利平、杨磊、李家辉、侯雅巍、邓志刚、孙宏恩、傅晨波、张智猛，及师

弟妹们张威、李胜明、芦斯戴罗、袁泉、陈通、王涛、林伟杰、童晟飞、章晓海，以及中心的秘书们洪佩佩、崔则君、孙静，和也教过我课的王新刚及武慧春老师。

限于篇幅，许多其他在这几年中带给我启发的人无法一一致谢，在此表示歉意。

最后，感谢家人的支持和理解。

谢华生

于 浙江大学玉泉校区

二〇一五年七月

摘　　要

作为一种磁约束装置，托卡马克是目前实现可控核聚变从而终极解决人类能源问题最可行的方式之一。高约束模式(H-mode)运行方式使托卡马克更容易达到临界点火条件，因而成为国际热核聚变反应堆(ITER)计划的主要工作模式。过去三十余年，H模的一些关键物理依然未得到完全理解，如边界区的不稳定性、湍流输运，以及L与H相互间的转化机制。

经过近二十年的发展，基于第一性原理的回旋动理学模拟已经成为研究托卡马克湍流和输运的主要工具。本文通过回旋动理学模拟(GTC代码)详细研究了HL-2A近期的几炮H模实验数据。对于静电模，模拟得出它主要是捕获电子模(TEM)，其非线性的频率和模数与实验一致。我们发现H模的边界区域中，在线性情况下呈现的是非常规的气球模结构，其模结构的峰值并不像传统L模下那样局域在极向投影面的外侧中平面附近，而是出现极向角局域在0到2π任何位置或者在极向出现多峰。通过扫描梯度参数，线性最不稳定模的频率也与L模那支不同，而是有频率的跳变，梯度大于某临界值时跳变到另一支。非线性谱的逆级联(cascading)过程，也并不像传统的那样是多模耦合导致的，而更像是单模自身的非线性演化的叠加所致。解析上我们通过求解简化模型方程，发现系统中其实有系列不稳定性模存在，也即有系列本征态(类似量子力学中的能级)。弱梯度的L模，最不稳定的(也即实验上最明显的)是基态，对应传统的气球模结构；强梯度的H模，最不稳定的通常是非基态，其模结构对应非常规模结构。从而L-H的转换可能类似于能级的跳变。通过非线性的模拟，我们发现，强梯度下带状流对输运并不像一般认为的有抑制作用而是几乎无影响。更有意思的是非线性输运也有一个临界梯度存在，当边界梯度超过该值，随着梯度的增加输运系数反而降低，这为L-H转换提供了一种新的微观机制。物理本质上可能因为线性模结构的变化使得径向关联长度变短，从而导致输运特性改变，比如从弱梯度下的扩散与对流并存转为更接近于纯扩散输运。

完整的研究应该考虑电磁效应，但是这个领域十几年的理论和模拟研究依然不太成功，即使是线性的频率也还无法使代码间或代码与实验做到一一对应。理论上，一般认为H模下最主要的电磁模是动理学气球模(KBM)。我们发现对于这支模，其增长率和频率

对平衡磁场的具体实现方式极为敏感。而静电扰动为主的TEM和ITG(离子温度梯度模)两支并不那么敏感。因此，TEM和ITG的模拟研究相对更成功，而KBM模拟目前依然与实验结果相差较大。

关键词： 托卡马克，高约束模式，微观不稳定性，气球模，捕获电子模，湍流输运

Abstract

As a magnetic confinement device, the tokamak is one of the most promising approaches to enable controlled fusion, which can solve the energy problem ultimately. The high confinement mode (H-mode) can make it much easier to achieve ignition. Thus the H-mode becomes a baseline operation scenario for the International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER). In the past three decades, many physical issues about the H-mode, such as micro-instabilities and turbulent transport in the edge, as well as the mechanism of L-H transition, are still not well understood.

After twenty years of development, first-principle gyrokinetic simulation has become a major tool to study turbulent transport in tokamaks. In this thesis, we carried out gyrokinetic simulations using GTC code for several recent shots of HL-2A tokamak in H-mode. The major electrostatic instability with experimental parameters is identified by the GTC simulation to be trapped electron mode (TEM), with good agreement in both nonlinear frequency and poloidal mode number. At the linear stage, the electrostatic modes driven by steep grdient with the H-mode edge parameters show un-conventional mode structures, which are not localized at the outboard mid-plane of the poloidal cross section, while the conventional ballooning mode structures are linked with L-mode parameters. This un-conventional structures can peak at any poloidal angle between 0 and 2π and can also have multi-peaks. The linear mode frequency is observed to jump to another branch when the gradient exceeds a critical value. The poloidal mode spectrum cascades inversely into longer wavelength region during the nonlinear saturation of turbulence, which are found more likely to come from the nonlinear evolution of each single mode instead of the mode-mode coupling process. The instability problem is mimicked by a model equation where a series of unstable eigen solutions are found. Under weak gradient, the most unstable modes are found to be in the ground state, which shows the conventional ballooning structure. However, under strong gradient, the most unstable solution jumps into the non-ground state, which shows aforementioned un-conventional mode structure. Thus, the L-H transition could be analogous to the transition between eigenstates. By nonlinear gyrokinetic simulations, we found that zonal flow would be less important to sup-

press turbulent transport in the strong gradient regime. More interestingly, we discovered that the turbulent transport coefficient would decrease with the gradient increasing when the gradient exceed a critical value. This provide a new route for the L to H transition without invoking shear flow or zonal flow. Physically, we would argue that the change of linear eigenmode structure leads to change of transport characteristics for the H-mode edge plasma, e.g., the reduction of radial correlation length, or change from diffusion and convection mixed transport to mainly diffusion transport.

The electromagnetic effects should be included for a completely study of the edge mirco-instabilities. However, these studies are still less successful after more than one decade of effort, even reach agreement on the linear frequency among different codes or between code and experiment. Theoretically, the most important electromagnetic mode in H-mode edge is considered to be kinetic ballooning mode (KBM). We find that this mode is very sensitive to the magnetic equilibrium implementation in the numerical code, although the TEM and ITG (ion-temperature gradient mode) modes are found not to be sensitive. This could explain why the codes tend to differ from experimental observations on KBM mode while tend to agree on ITG/TEM.

Keywords: Tokamak, H-mode, Micro-instabilities, Ballooning mode, Trapped electron mode, Turbulent transport

插　图

1.1 托卡马克概要图[1]。 3

1.2 托卡马克中不同模式下压强剖面图(修改自原图[2])。 6

1.3 JET托卡马克中典型的边缘局域模信号[3]。 8

1.4 ELM的标准peeling-ballooning模型，取自文献[4]。 9

1.5 L-H转换的Itoh-Itoh模型，左图的有效输运系数有两个平衡态，一个是输运系数大的L态；一个是输运系数小的H态。在参数g的中间区，两个平衡态共存。右图是基于该模型计算实验参数的结果，显示从L模经过约50ms的dithering过程进入H模，定性上与实验观察接近。取自文献[5–7]。 10

1.6 L-H转换的prey-predator模型，左图为零维模型，右图为一维模型，均定性解释了一些实验过程。取自文献[8;9]。 11

1.7 BOUT++模拟EAST实验，能大致预测实验中最不稳定的模的环向模数n。取自文献[10]。 12

1.8 JOREK最近的流体模拟已经大致能得到ELM的振荡循环信号。取自文献[11]。 12

1.9 取DIII-D边界H模台基区参数，不同的回旋动理学代码计算的线性微观不稳定性对比。取自文献[12]。 13

1.10 取DIII-D边界H模台基区参数，回旋动理学GYRO代码计算输运系数和密度波动，并与实验对比。取自文献[13]。 14

1.11 不同托卡马克位形(限制器或偏滤器)的等离子体均被最后闭合磁面(LCFS)分为主等离子体区和刮削层区(SOL)，主等离子体又可分为堆芯(core)区和边界(edge)区。 15

2.1 托卡马克中粒子轨道示意图，其中右下角的图为实际参数计算的轨道。 17

2.2 托卡马克中常见波动的特征时间和空间尺度(重作自J. Q. Li原图[14])。 18

2.3 离子温度梯度模的机制[15]。 20

2.4 无碰撞捕获电子模不稳定性机制及耗散捕获电子模增长率与碰撞率关系[16]。 21

2.5 扩散系数随碰撞频率的变化[16]。 24
2.6 波粒相互作用的静电束流不稳定性的饱和幅与增长率关系。 25
2.7 多个回旋动理学和回旋流体代码的模拟显示超过临界梯度时，随着梯度增加，热输运系数增加[17]。 27
2.8 带状流通过打乱径向的川流(streamer)结构而明显的抑制输运[18]。 28

3.1 本征矩阵法解局域理想气球模方程(4.4)，增长率$\gamma = 0.341$。 37
3.2 标准打靶法解局域理想气球模方程(4.4)，增长率$\gamma = 0.342$。 37
3.3 初值法解局域理想气球模方程(4.4)，增长率$\gamma = 0.342$。 38

4.1 带位移的圆磁面平衡。 41
4.2 q和p (用轴上值归一化) 剖面(a) $\beta_1 = 0.0403$ 及(c) $\beta_2 = 0.2015$。(b) 和(d) 显示相应的拉长度(elongation) E和三角形变(triangularity) T。(e) 显示相应的Shafranov位移。(f) 为磁面等高图。 42
4.3 Shafranov位移的解析解与数值解对比。 42
4.4 Shafranov坐标与磁面坐标。 43
4.5 数值求解局域气球模方程显示Shafranov位移有显著影响。 45
4.6 AMC计算柱位形下的内扭曲模示例。 47
4.7 AMC计算理想气球模示例。 47
4.8 AMC和GTC计算的理想气球模增长率随环向模数n增大而趋于常数。 48
4.9 局域s-α模型扫描径向剖面预测全局理想气球模增长率和模位置。 49
4.10 GTC全局理想气球模模拟结果，$n = 30$，电势扰动$\delta\phi$。 49
4.11 局域s-α模型扫描径向剖面，包含平衡位移，理想气球模可以进入局域第二稳定区，但全局依然不稳定。 50

5.1 HL-2A #14048炮观察到的电势和磁场扰动信号的谱图。 54
5.2 #19298炮不同径向探针位置r-a ~ -3mm,-0.5mm和2.0mm电势扰动的自动关联谱强度(auto-power spectral)图，频率峰值约在80kHz。 55
5.3 模拟中用的等离子剖面，其中$L_f \equiv -d\ln f/dr$。$q(r)$和$T_e(r)$剖面拟合自#19298炮494ms的实验数据。其他实验剖面数据缺乏。为简单，模拟中我们取$n_e(r)$，$T_i(r)$和$n_i(r)$的剖面与$T_e(r)$的相同。 56
5.4 线性频率随环向模数n的变化，$T_e = 1keV$。碰撞起阻尼作用。 56
5.5 线性频率和增长率随温度和密度的变化，$n = 20$。密度对结果无影响，温度对归一化的频率也影响不大，即，$\omega_r/\omega_s \simeq 15 - 19$。 57

5.6 不同温度和密度梯度下的线性结果，$n = 20$及$Te = 200eV$。频率从$\omega > 10\omega_s$到$\omega < 3\omega_s$有一处明显的跳变(a)使用非均匀梯度，台基区归一化半宽度$\Delta/a > 0.08$时，或者(b) 使用展平的梯度$RL_T^{-1} < 80$时。 58

5.7 线性极向截面的模结构，$n = 10$。模包络面峰值对应的极向角θ_p不像弱梯度下典型的气球模结构一样为零。这里，$\theta_p \simeq \pm\pi/4$。 59

5.8 线性极向截面的模结构，$n = 5$。出现$|\theta_p| > \pi/2$，即反气球模结构。 59

5.9 固定点$(r = r_c, \theta = \pi/2, \zeta = 0)$处的$\delta\phi(t)$随时间的非线性演化及相应的频率谱，其中$r_c$是模局域峰值的径向位置。非线性频率与图5.4中的线性频率依然相近，即，$\omega \simeq 15\omega_s$。 60

5.10 用实验温度$T_e = 50eV$同时加碰撞，对模拟结果改变不大，$\omega \simeq 20\omega_s$。 61

5.11 不同模拟时刻的极向谱。非线性逆坍缩使得峰值m下移到$m = 12 - 38$，与实验值$m = 14 - 33$接近。 62

5.12 电子热输运系数χ_e和$\delta\phi(t)$方均根在单n和多n非线性模拟中的演化。这里显示多模耦合并非m下移的原因。 62

6.1 基于气球模理论，文献[19]得出模结构局域在$\theta_p \simeq -\pi/2$的模可以存在(取自文献[19])。 66

6.2 基于二维本征解，文献[20]得出对于不同剖面时模结构局域在$\theta_p \simeq \pi/2$的模可以存在(取自文献[20])。 66

6.3 基于局域模型，文献[21]得出梯度较强时最不稳定的模可以是气球角$\vartheta_k \neq 0$(取自文献[21])。 67

6.4 基于GTC模拟，文献[22]得出梯度由弱变强时占主导的模的模结构的局域位置会从$\theta_p \simeq 0$变到$\theta_p \simeq \pm\pi/2$(取自文献[22])。 67

6.5 用不同的台基宽度模拟HL-2A实验，显示至少有两支模存在。当梯度超过临界值时，最不稳定模跳变到另一支。同时，这个临界梯度与实验中L-H转换的梯度相近。 68

6.6 $RL_T^{-1} = 75$时，初始增长阶段，两支电子抗磁频率方向的模共存。 68

6.7 模拟中用到的典型弱梯度和强梯度剖面。 69

6.8 GTC静电模拟TEM中静电势在极向截面(X, Z)平面上的常规(a)和非常规(b-i)气球结构。(a) 使用了L模的弱梯度参数$(R_0L_T^{-1} < 40)$，而(b)-(i)使用了强梯度H模参数$(R_0L_T^{-1} > 80)$。只(e)和(g)包含了碰撞。 70

6.9 常规和非常规模结构傅里叶分量$\delta\phi_m(r)$的实部。(a)-(d) (环向模数n分别为20、10、5和10)分别对应的是图6.8的(a), (b), (g)和(i)。虚线为相应的有理面r_s，使得$m = nq(r_s)$。 71
6.10 GTC中非常规的ITG模结构。(a & b) 反气球结构。(c & d) 两模共存(或，单模有两个径向峰)于不同的径向位置。一个$\theta_p \simeq \pi/2$，另一个$\theta_p \simeq -\pi/2$。 72
6.11 方程(6.2)中，系列根存在。存在一个临界梯度，使得最不稳定的根从基态跳到非基态。对弱梯度($\epsilon_n = 0.5$)，最不稳定(红色'x')的是基态(a&b)，代表常规气球模结构。对强梯度($\epsilon_n = 0.2$)，最不稳定(红色'x')的为非基态(c&d)，代表非常规气球模结构。 73
6.12 方程(6.2)在密网格$N_\theta = 3072$和宽计算区间$\vartheta = [-40, 40]$时的数值解，验证了图6.11对主要根是收敛的。 74
6.13 二维方程(6.3)本征解中典型的非传统模结构。(b)跟图6.8(c&d)类似, 而(c&d)跟图6.10(d&c)类似。 75

7.1 弱梯度下，带状流明显抑制输运，梯度越大输运系数越大。 78
7.2 强梯度下，梯度越大输运系数越小。 78
7.3 强梯度和弱梯度的非线性模结构对比。 79
7.4 扫描梯度，输运系数存在反转点。 80
7.5 L-H转换可能来源于微观不稳定性本征态基态到非基态的跳变的过程示意图。 81

8.1 EAST最近的H模实验谱图，高频电磁模中有多个分支(取自文献[23])。 84
8.2 GS2代码的模拟认为MTM和KBM在边界强不稳定，从而起较大作用(取自文献[24])。 84
8.3 GEM代码的模拟认为KPBM和KBM在边界有关键作用(取自文献[25])。 85
8.4 扫描β_e对比GTC与其他回旋动理学代码(GYRO，GENE及GS2)针对不同的平衡场模型。ITG到TEM到KBM的转换可以随β_e的增大而清晰看到。平衡实现对ITG和TEM分支影响并不大，但对KBM分支影响非常大。数据部分来自[26–29]。ES意思是静电模拟。 87
8.5 GTC与GYRO的对比，针对不同的平衡实现。GYRO (s-α，$\alpha = 0$)为Model-a；GYRO (Miller，$\alpha = 0$)为Model-b；GYRO (Miller，$\alpha \neq 0$)为Model-c。 88
8.6 GTC模拟中使用的局域和全局剖面中的κ_n。 88
8.7 三种平衡下GTC模拟ITG的$\delta\phi$图。 89

8.8 GTC模拟KBM，$k_\theta\rho_i < 0.1$ $(n = 7)$时出现增长率近十倍的跳变，模结构也显著改变。 90
8.9 GEM模拟中，低n处，也出现增长率和频率跳变，被解释为动理学剥离模[30]。 91
8.10 GTC模拟KBM，$k_\theta\rho_i < 0.1$ $(n = 7)$时，滤掉$m < 5$的模，增长率恢复到原来值附近。 91
8.11 GTC模拟强梯度线性IBM，模结构正常，$|m - nq| \simeq 0$。 92
8.12 GTC模拟强梯度线性KBM，模结构有形变，$|m - nq| \gg 1$。 92
8.13 GTC模拟非线性KBM，其中下方的三张截面图为$\delta A_\parallel(R, Z)$。 94

C.1 托卡马克中典型的气球模结构。 107

表　格

3.1　国际上部分主要的回旋动理学代码 32

4.1　局域s-α模型、GTC及AMC计算的IBM增长率和模位置 48

5.1　HL-2A托卡马克H模实验边界参数 55

7.1　L模弱梯度和H模强梯度的物理完全不同 80

8.1　局域剖面中梯度径向宽度对KBM和ITG的影响 87

8.2　GTC不同平衡实现对ITG不敏感 90

缩写、符号清单、术语表

H-mode H模，高约束模式(High-confinement mode)

L-mode L模，低约束模式(Low-confinement mode)

GTC 一个初值回旋动理学粒子模拟代码(Gyrokinetic Toroidal Code)

TEM 捕获电子模(Trapped Electron Mode)

ITG 离子温度梯度模(Ion Temperature Gradient mode)

KBM 动理学气球模(Kinetic Ballooning Mode)

IBM 理想气球模(Ideal Ballooning Mode)

AE 阿尔芬本征模(Alfven Eigenmode)

MTM 微撕裂模(Mirco-tearing Mode)

ZF 带状流(Zonal Flow)

GAM 测地声模(Geodesic Acoustic Mode)

FLR 有限拉莫半径(Finite Lamor Radius)

MHD 磁流体(Magnetohydrodynamics)

PIC 一种粒子模拟方法(Particle-In-Cell)

ELM 边缘局域模(Edge Localized Mode)

LCFS 最后闭合磁面(Last Close Flux Surface)

SOL 刮削层(Scrape-off Layer)

目　　次

致谢 I
摘要 III
Abstract V
插图 VII
表格 XIII
缩写、符号清单、术语表 XV
目次
1　绪论 1
1.1　聚变等离子体物理 1
1.2　描述等离子体的物理模型 3
1.3　高约束模及边缘局域模 6
1.4　本论文结构 14
2　微观湍流与输运理论概述 17
2.1　导心运动 17
2.2　微观不稳定性 18
2.3　碰撞输运 23
2.4　非线性饱和机制 24
2.5　湍流输运 26
3　理论模型和数值方法 31
3.1　回旋动理学粒子模拟 31
3.2　本征方程及其求解 35
4　托卡马克磁流体本征模 41
4.1　托卡马克位形 41
4.2　$s-\alpha$一维局域模型下的气球模 44
4.3　全局磁流体本征方程 44
4.4　理想气球模 48

5 HL-2A边界静电微观不稳定性 53
5.1 HL-2A实验观察和模拟设置 54
5.2 线性模拟结果 55
5.3 非线性结果 60
5.4 总结和讨论 63
6 微观不稳定性的非常规气球模结构 65
6.1 前人的结果 65
6.2 TEM和ITG模拟结果 66
6.3 本征理论 69
7 强梯度下的输运反转 77
7.1 弱梯度下的传统结果 77
7.2 强梯度下的输运反转 79
7.3 静电结果总结 79
8 边界电磁微观不稳定性 83
8.1 实验和前人理论结果 83
8.2 线性动理学气球模 85
8.3 非线性气球模 93
9 总结和展望 95
9.1 总结 95
9.2 展望 96
附录A 磁面坐标 97
A.1 度规张量与雅可比 97
A.2 磁面坐标 98
A.3 零位移情况 102
附录B ITG本征方程矩阵形式 105
附录C 典型气球模结构 107
参考文献 109
作者简历 121
在学期间主要研究成果 123

1 绪论

能源是人类进步的基石，也是制约社会发展的瓶颈。

学会用火是人类的一大飞跃，也是其区别于其他动物的一个关键特征。燃烧，属于化学反应，释放的是原子外层电子之间的相互作用能，一次反应释放的能量eV（电子伏特）量级。1890年代人们发现了放射性元素，能持续不断的放出能量。此时原子核的结合能第一次进入人们的视野。重核裂变和轻核聚变都属于核反应，一般而言后者放能比前者高。它们最终的归属是核结合能最低的铁元素，每次反应释放的能量接近MeV量级，比化学反应大近10^6倍。人类能源利用的另一次重大飞跃是1940年代释放了核能，并且在随后实现了裂变能源的可控和平利用。理论上，根据爱因斯坦的质能方程$E = mc^2$，能量效率再次飞跃可以通过释放所有质量的能量而达到，比如正反质子的湮灭，单次放能可达GeV 量级，从而又提高10^3倍。但廉价的获取反物质尚处于探索阶段。

1.1 聚变等离子体物理

受限于不可再生的化石能源的日渐耗尽，人类寻找新能源的诉求愈发紧迫。目前广泛使用的化石能源还附带来了环境污染。目前可用的风能、水能及太阳能等清洁能源，比较有限，很难作为终极解决方案。核能中的裂变能发挥了较大作用，但安全性难达百分百，尤其前苏联切尔诺贝利(1986)和日本福岛(2011)等数次核事故已经使得公众谈核色变，且地球上的可开采的裂变原材料也有限。一个可能终极的解决方案是核聚变能源。它的原材料可以从海水中提炼，1 升水能释放的的能量可相当于300升汽油的燃烧。按目前的消耗速度，地球上的海水中包含的聚变能可供人类使用达百亿年。并且它安全性有保障，无放射性，即使发生核泄露，由于温度会随之下降，核反应自动停止。它的产物是也是一些轻元素，无污染。聚变不但可解决人类能源问题，也将同时终极解决环境问题，可谓理想能源。

只是困难在经过人类几十年的努力，聚变能依然无法可控。氢弹中释放的确实是聚变能，可惜我们无法和平利用。一般而言聚变需要极高的温度以克服核子间的结合势垒，此

时物质处于等离子态。这是一种相较于固体、液态和气态而言的‘第四态’，其原子核与核外电荷是相互分离的。考虑聚变放能和辐射等损失的耗能，可以得到劳森判据[31]

$$n\tau_E T > 3 \times 10^{21} keV \cdot s \cdot m^{-3}. \tag{1.1}$$

根据该判据，要实现聚变能持续产出需要维持温度T、密度n和约束等离子体时间τ_E三乘积达足够大(这里的单位$1eV$ 约相当于$11600°K$，也即一万度左右)。通常有三种方式可实现聚变：磁场约束、惯性约束和重力约束。恒星上的聚变反应属于重力约束，目前人类在地球上无法做到。惯性约束和磁场约束是目前人类主要推进核聚变能源的两条途径。前者，目前最大的惯性约束聚变装置是美国的国家点火装置(NIF)，通过多束强激光压缩和加热聚变靶丸形成高密度(如$> 10^{26}/cm^3$)和高温(如$> 10keV$)，2014年刚刚能实现产能与耗能“相当”[32]，而且还未考虑各种辅助设备的能量消耗，计算中产能耗能的定义也有特别处理。中国对应的激光打靶惯性约束聚变装置有神光I、II、III 系列。后者，目前最有希望的磁约束聚变装置一般认为是托卡马克(tokamak)，并且在1998年左右在日本的JT60和欧洲的JET上基本验证了$Q \sim 1$[33;34](Q = 聚变放能/维持聚变所输入的能量)，也即产能与耗能相当。其他各种聚变途径依然在探索中，但都存在诸多物理困难，包括不稳定性问题(各种磁约束和惯性约束装置均面临此问题)、反应截面过小（如，打靶或对撞），等等。为了实现可控聚变，除了托卡马克，历史上(1950年代起)及目前仍然在研究的聚变装置有：Z或θ箍缩(pinch)装置、磁镜(mirror machine)、仿星器(stellarator)、反场箍束装置(RFP, reverse field pinch)、场反位形装置(field reversed configuration, FRC)、球马克(spheromak)、球形托卡马克(spherical tokamak, ST)、偶极场装置(dipole machine)，等。其中大多数都是环位形装置，主要差别在平衡磁场位形不同，比如RFP极向场大于环向场，ST属于小半径与大半径接近($a/R \sim 1$) 的tokamak，spheromak没有欧姆线圈产生的环向场，stellarator磁场极为扭曲，FRC也无环向场可看作是拉长成环的Z箍缩，dipole是模仿地磁场。对各磁约束装置的平衡、磁流体不稳定性及粗略优劣分析可参考Freidberg(2007)[35]。

这些物理的困难严重制约着工程技术的进一步发展。实际上1998年后，大部分磁约束装置都转向物理研究，不再进行聚变反应去试验更高的Q参数。因为达到$Q \sim 1$就基本上验证了聚变的可行性，而冲击更高的Q将有被聚变产物打坏装置的风险。这是基于目前的技术还做不到聚变能的稳态输出以及转换为电能使之成为直接可用的能源形式。物理研究是过去十几年的重点，也将依然是未来一段时间研究的重点。

本论文主要研究托卡马克物理，其原始概念在1950年代从苏联开始发展起来，并在1968年后成为磁约束聚变研究的主流，概要图见图1.1，强环向场由外面的变压器线圈产生，极向场由等离子体内部环向电流产生，总磁场呈螺旋状。极向场B_θ和环向场B_ϕ间的

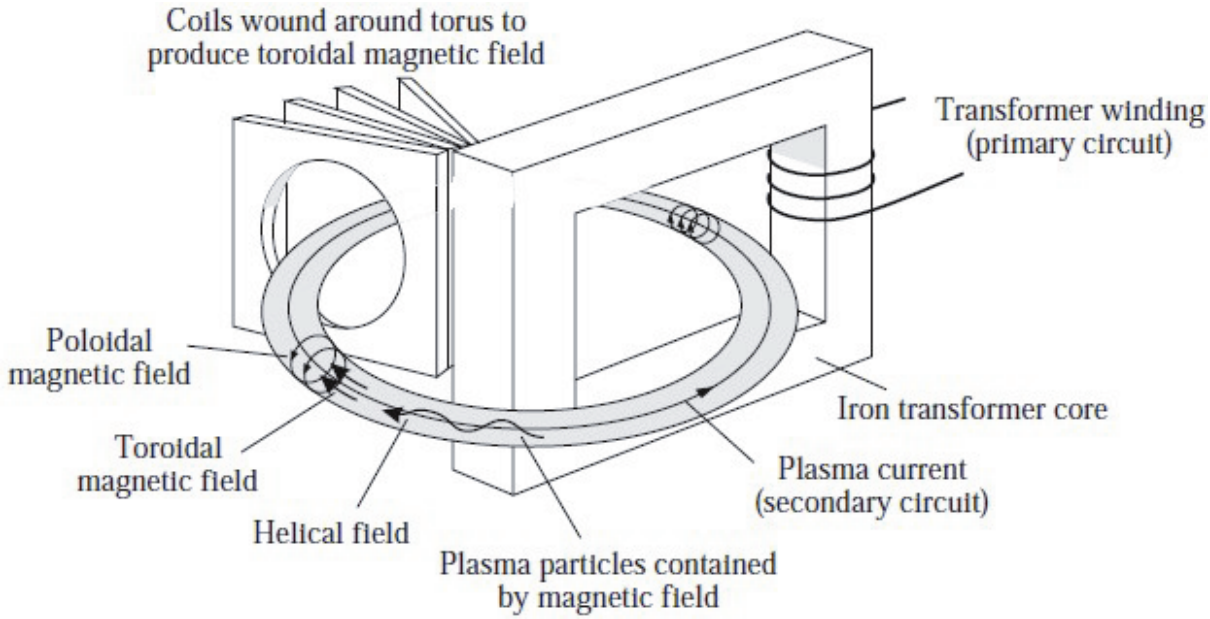

图 1.1 托卡马克概要图[1]。

关系由安全因子$q \simeq rB_\phi/RB_\theta$描述。托卡马克通过环向场约束等离子体的带电粒子(离子、电子)，通过极向场抑制其向外的漂移，从而使得整个等离子体基本约束在一定体积范围内。

正在法国建设的国际热核聚变堆ITER(International Thermonuclear Experimental Reactor，www.iter.org)是目前在建的最大的托卡马克装置，也是目前全世界最大的合作项目之一，经费预算在百亿美元量级，主要用来验证和探索燃烧等离子体物理及稳态运行规律，是为下一代商业聚变堆DEMO 作前期探索而造，使用氘氚反应$^2_1\mathrm{D} + ^3_1\mathrm{T} \rightarrow ^4_2\mathrm{He} + ^1_0\mathrm{n} + 17.6\mathrm{MeV}$。

对聚变的最近进展及入门介绍参见文献Chen(2011)[36]和Kikuchi(2012)[34]，对聚变尤其托卡马克物理细致的讲述参见文献Kikuchi(2011)[37;38]和Wesson(2011)[16]。全世界的托卡马克分布及简介可在如下网站找到：www.tokamak.info。

1.2 描述等离子体的物理模型

常用的描述等离子体的物理模型有：单粒子模型、动理学模型、流体模型及进一步简化的磁流体模型。

等离子体可以看作粒子与电磁场的混合。等离子体的演化就是粒子如何运动和电磁场如何演化。前者最简单的描述是单粒子运动，非相对论情况下就是牛顿运动方程$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}/m = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})/m$。单粒子运动，也可以用哈密顿方程或拉格朗日方程描述，

比如哈氏描述$\dot{p}=-\partial H/\partial q$，$\dot{q}=\partial H/\partial p$。拉氏量$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+e\mathbf{A}/c-e\phi$，正则动量$\mathbf{P}=\partial L/\partial\mathbf{v}=\mathbf{p}+e\mathbf{A}/c$，哈密顿量$H=\sqrt{m^2c^4+c^2(\mathbf{P}-e\mathbf{A}/c)^2}+e\phi$。非相对论时，$L=mv^2/2+e\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}/c-e\phi$，$H=(\mathbf{P}-e\mathbf{A}/c)^2/2m+e\phi$。在等离子体中，尤其强平衡磁场存在时，更常用的是导心轨道概念，我们在后文再具体讨论。

对电磁场的描述一般用麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0,\\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0,\\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\partial\mathbf{B}/\partial t,\\ \nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t.\end{aligned}\tag{1.2}$$

再退化为静电极限，只需要上面的第一个方程，即高斯定律或者泊松方程。

以上描述未提及麦氏方程中电流和密度如何表出，这就需要统计力学描述。假设系统中有N个粒子，则在$6N$维的相空间中，粒子的运动方程，或分布函数的演化方程精确等价于刘维尔方程

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{j=1}^{N}(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{a}\cdot\frac{\partial F}{\partial\mathbf{v}})=0.\tag{1.3}$$

以上方程，在等离子体中另一种精确地等价描述是Klimontovich(1967)[39]描述

$$\frac{dN_s}{dt}=\frac{\partial N_s}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial N_s}{\partial\mathbf{x}}+\frac{q}{m}[\mathbf{E}^m(\mathbf{x},t)+\mathbf{v}\times\mathbf{B}^m(\mathbf{x},t)]\frac{\partial N_s}{\partial\mathbf{v}}=0.\tag{1.4}$$

相空间为6维，其中$N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=\sum_{j=1}^{N}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j(t))$。取系综(ensemble)平均，$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\equiv\langle N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\rangle$，$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\equiv\langle\mathbf{E}^m(\mathbf{x},t)\rangle$，$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\equiv\langle\mathbf{B}^m(\mathbf{x},t)\rangle$，相应的小尺度波动量$\delta N_s=N_s-f$，$\delta\mathbf{E}=\mathbf{E}-\mathbf{E}^m$，$\delta\mathbf{B}=\mathbf{B}-\mathbf{B}^m$。从而得到

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}}+\frac{q}{m}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}=-\frac{q}{m}\langle(\delta\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\delta\mathbf{B})\cdot\frac{\partial\delta N_s}{\partial\mathbf{v}}\rangle.\tag{1.5}$$

方程(1.5)右边的小尺度波动就是通常说的碰撞项$(\frac{\partial f}{\partial t})_c$。不同的碰撞模型该项的表述形式不同，最常见的算符形式是Krook 碰撞、Fokker-Planck碰撞、Landau 碰撞等。对于高温等离子体，粒子间的库仑力导致的散射很小，碰撞频率很低，所以碰撞效应在短时间尺度时可忽略，因而等离子体中最常用的动理学(kinetic) 方程是无碰撞的Vlasov 方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}}+\frac{q}{m}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}=0.\tag{1.6}$$

以上系综平均的过程便引入了近似，其对应的尺度远小于宏观尺度，但远大于原子尺寸的尺度。粒子密度$\rho=\sum_s q_s\int f d^3\mathbf{v}$，电流密度$\mathbf{J}=\sum_s q_s\int f\mathbf{v}d^3\mathbf{v}$。

“电荷数”

流体描述可以通过对动理学方程速度空间求矩得到，零阶矩$\int(\cdots)d^3\mathbf{v}$得到连续性(密度守恒或密度流)方程

$$\frac{\partial n_j}{\partial t}+\nabla\cdot(n_j\mathbf{u}_j)=0, \tag{1.7}$$

一阶矩$\int(\cdots)\mathbf{v}d^3\mathbf{v}$得到动量(流)方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t}+\mathbf{u}_j\cdot\nabla\mathbf{u}_j=\frac{q_j}{m_j}(\mathbf{E}+\mathbf{u}_j\times\mathbf{B})-\frac{\nabla\mathbf{P}_j}{m_jn_j}+\mathbf{R_j}, \tag{1.8}$$

其中$\mathbf{R_j}$为粒子间碰撞引起的摩擦力，$\mathbf{P}_j=p_j\mathbf{I}+\mathbf{\Pi}_j$为压强张量。以上求矩过程可以一直持续下去，但是系统始终是不封闭的，因而需要引入一个新的方程来截断。通常对于粒子元(或流体元)的方程，除了(1.7)和(1.8)外，再引入状态方程。状态方程根据需要可以取不同的形式，比如垂直和平行各向异性的CGL(1956)[40]方程形式。而最简单常用的是压强各向同性的方程

$$\frac{d}{dt}\frac{p}{(m_jn_j)^\gamma}=0, \tag{1.9}$$

其中的系数γ根据不同情况取不同的值，比如$\gamma=3$是最常见的。等离子中较著名的流体输运方程Braginskii方程[41]不直接包含状态方程，而是使用二阶矩的热流方程

$$\frac{3}{2}n_j\frac{d\mathbf{T}_j}{dt}+n_jT_j\nabla\cdot\mathbf{u}_j=-(\mathbf{\Pi}_j\nabla)\cdot\mathbf{u}_j-\nabla\cdot\mathbf{q}_j+Q_j, \tag{1.10}$$

其中$d/dt=\partial/\partial t+(\mathbf{u}_j\cdot\nabla)$，$p_j=n_jT_j$，$\mathbf{q}_j$为热流密度，$Q_j$为碰撞引起的能量转移。

由于用来封闭的方程(比如状态方程)的任意性，流体描述的结论通常只是粗略的，可靠性需要额外的方式去检验。

以上流体方程中每种粒子依然是分开的，再进一步忽略一些高频微观尺度物理，可以化为单流体方程，即常说的磁流体方程，完整的封闭形式如下

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=0, \text{(连续性方程)}\\ \rho\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}=-\nabla p+\mathbf{j}\times\mathbf{B}, \text{(运动方程)}\\ \dfrac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma})=\dfrac{2}{3\sigma_c}\rho^{-\gamma}j^2, \text{(能量方程)}\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{t}}, \text{(法拉力定律)}\\ \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}, \text{(安培定律)}\\ \mathbf{j}=\sigma_c(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}), \text{(欧姆定律)}\end{cases} \tag{1.11}$$

其中$d/dt=\partial/\partial t+\mathbf{u}\cdot\nabla$为随流导数。14个方程，14个未知量，方程组封闭。麦克斯韦方程中两个散度方程是多余的，只是初始条件无需列入。安培定律中忽略了位移电流项，因为磁流体中场可看作是缓变的。

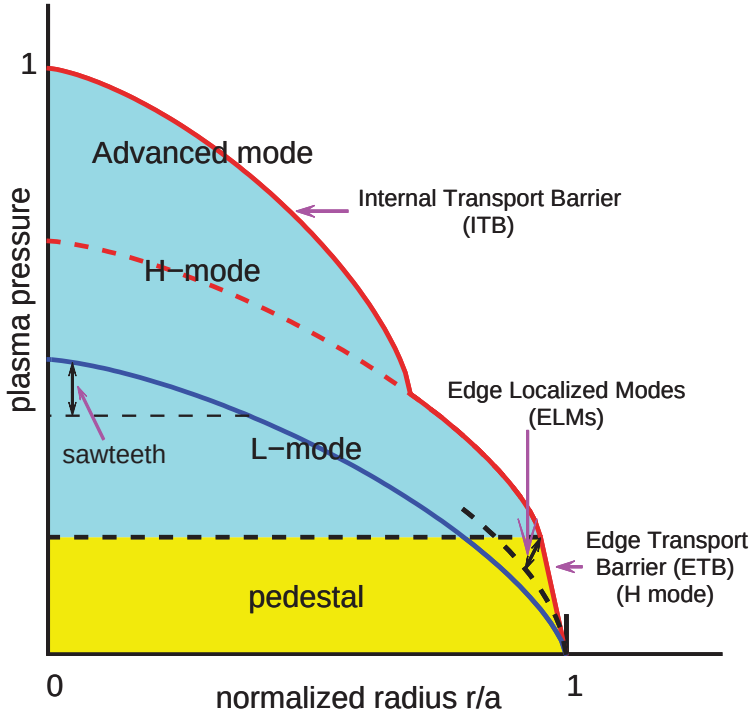

图 1.2　托卡马克中不同模式下压强剖面图(修改自原图[2])。

若流体无黏性、绝热，且为理想导体（$\sigma_c \to \infty$），(1.11)化为理想磁流体方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ (连续性方程)} \\ \rho \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \text{ (运动方程)} \\ \dfrac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0, \text{ (状态方程)} \\ \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}}, \text{ (法拉力定律)} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \text{ (安培定律)} \\ \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \text{ (欧姆定律)} \end{cases} \tag{1.12}$$

在讨论磁流体平衡和稳定性问题时，本论文后续涉及到的主要是以上的理想磁流体方程。在研究具体问题时，本节的方程常常是出发点，但又会针对具体问题作其他简化。比如，本论文所用的大多数情况是基于简化的动理学方程——回旋动理学或漂移动理学。对于它们的描述在后文。

1.3　高约束模及边缘局域模

实现磁约束聚变，最关键的问题之一是提升约束水平或者说降低输运。因此，深度理解约束和输运的物理是极重要的。

高约束模是相较于低约束模而言(两者的具体含义见下文)，首次意外在德国的ASDEX托卡马克(现在已经改装为四川成都的HL-2A 装置)实验上发现[42]。由于F. Wagner的坚持和耐心，才确认这是此前理论预料之外的新发现，并随后引起广泛的兴趣。因为，由于H模下边界形成台基区，约束性能成倍改善，使得聚变的实现更容易了。而边缘局域模(Edge-Localized Modes，ELM)则是H模时伴随的现象，是压强分布剖面从被破坏(crash)到重建间来回跳变形成的准周期振荡。实验上，只要加热功率足够大，各种装置上(限制器或偏滤器位形的托卡马克、仿星器、球马克、反场箍缩和磁镜)都看到了H 模，且不受限于加热手段。这表明，H模的触发机制必然是普适的。尽管已经研究了三十余年，也提出了许多理论模型，H 模和ELM的机制依然未完全确定[43]。整个过程，涉及了从微观、介观到宏观多个时间和空间尺度，可能是一种极为复杂的非线性过程。

1.3.1 高约束模

图1.2显示了不同情况下托卡马克压强的径向剖面图，常规情况对应于图中的低约束模(L-mode)。对于有些情况，尤其q分布在内部有$q=1$面时，剖面演化会出现锯齿振荡(sawteeth)。这种振荡通常是危险的和需要避免的。当增加外部加热，达到某一临界条件，在边界会出现一个台基区，即所谓的外部输运垒(ETB)，这使得等离子体储能大幅提升，通常可以达到L模的两倍以上，因此称为H模(高约束模，H-mode)。高约束模，在不同的托卡马克位形（偏滤器、限制器）及仿星器都存在，具有普适性。进一步增加外部能量输入，或者在一些其他条件下，还可以见到所谓的更高的先进约束模式(advanced mode)，内部也存在输运垒(ITB)，约束性能进一步提升。H模的压强梯度提升通常是密度和温度梯度同时增大，在L模和H模中间还存在一种中间态，叫I模(I-mode)[44;45]，密度处于H模强梯度，但温度处于L模弱梯度。对于锯齿和H模，尽管已经发现几十年，但是其物理机制依然未完全理解。

应为“密度”

应为“温度”

对于复杂的物理过程，尤其机理不明时，最简单的理解来自标度率，即根据现有的实验数据，拟合出一个因变量相对于其他各物理量作为自变量的指数关系。所取数据点或自变量不同，定标率也会有差异。尽管如此，定标率依然有经验参考价值，能简单外推预测新参数下的因变量大致值。比如对于tokamak能量约束时间τ，一组L模的定标率为[35]

$$\tau_L = 0.048 I_M^{0.85} B^{0.2} \bar{n}_{20}^{0.1} P^{-0.5} R_0^{1.2} a^{0.3} \kappa^{0.5} A^{0.5}\ s, \tag{1.13}$$

相同自变量，一组H模的定标率为

$$\tau_H = 0.145 I_M^{0.93} B^{0.15} \bar{n}_{20}^{0.41} P^{-0.69} R_0^{1.39} a^{0.58} \kappa^{0.78} A^{0.19}\ s. \tag{1.14}$$

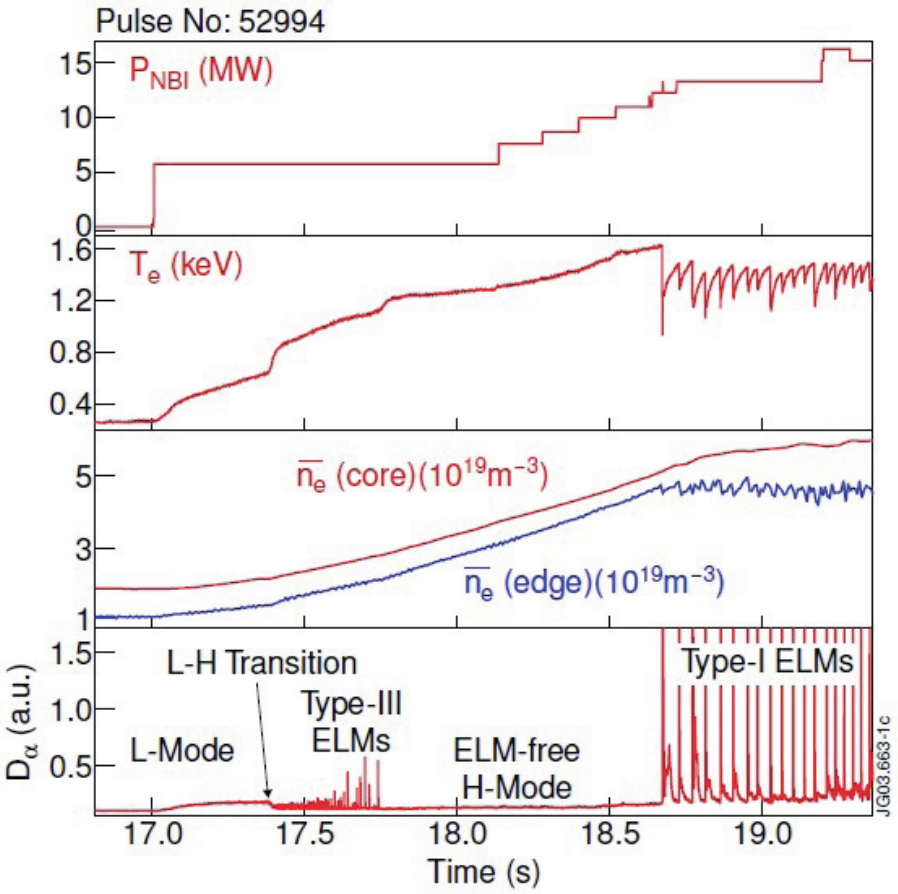

图 1.3　JET托卡马克中典型的边缘局域模信号[3]。

根据上述定标，在特定参数范围，H模能量约束时间可比L模大2-3倍，而聚变三乘积可提高一个量级。以上定标率能否正确预测未来装置尚不一定，尤其注意到上述定标率中加热功率P中的指数为负数，也即加热功率越大约束时间越短；再就是上述定标率，一些参数范围内H模的约束性能甚至远低于L模的。

1.3.2　边缘局域模

边缘局域模(ELM)是H模时伴随的现象，压强剖面不断被破坏和重建，特征频率10^0 – 10^2Hz 不等。ELM分为多种，常见的为三种，分别为“type-I”(或“giant”)、“type-II”(或“grassy”)和“type-III”(或“small”)。它们主要区别在特征频率、边界压强增大时频率的变化趋势和边界能量损失率等等的不同。典型的放电诊断信号可见图1.3。

边界局域模通常是不利的，我们更希望维持高约束模式下的稳态运行，即ELM free H-mode。最近(2012年)，在EAST托卡马克上，已经实现了最长32 秒的稳态H模[46]。目前对于ELM的标准模型是所谓的基于理想磁流体不稳定性的peeling-ballooning模型[47;48]。边界台基区形成时，导致强梯度，压强梯度大时，会导致气球模不稳定，而强梯度又会产

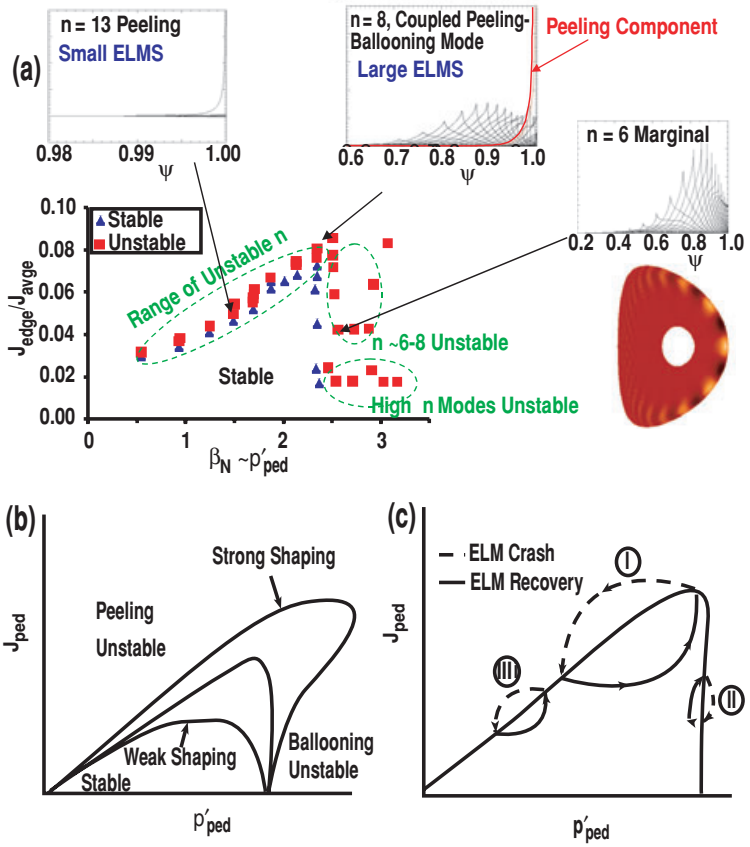

图 1.4 ELM的标准peeling-ballooning模型，取自文献[4]。

生较大的边界自举(bootstrap)电流，驱动剥离模。图1.4显示了标准P-B模型对三种ELM 的形成的示意图，主要过程都是：压强和电流的此消彼长导致等离子体处于不同的不稳定或稳定区间，由于外源的存在，导致稳定区和不稳定区的变换，穿过临界不稳定点时出现ELM信号。因此P-B模型有一定合理性。但P-B模型是否确实是ELM机制最关键因素或者是否只有这两种不稳定性起主因，目前依然无定论。并且，P-B理论完全是基于线性不稳定性阈值，而实验上的物理肯定是非线性的。确实，最近基于P-B模型的模拟和理论研究[49]也表明，非线性的ELM激发阈值与线性不同，通常要更高。

ELM也有优点，它有利于芯部粒子及杂质的排出，这对维持H模稳态运行及以后聚变能的利用有重要性。理解ELM至关重要也在于，一旦我们理解了它，我们就能扬长避短，利用它有利的一面，避免它不利的一面。

实验上，提升H模约束水平或控制ELM通常的方式有：位形控制、等离子体旋转控制、共振磁扰动控制、边界条件控制[50]，等。它们在一定程度上确实是有效的，但相应的理论研究也还在起步阶段。

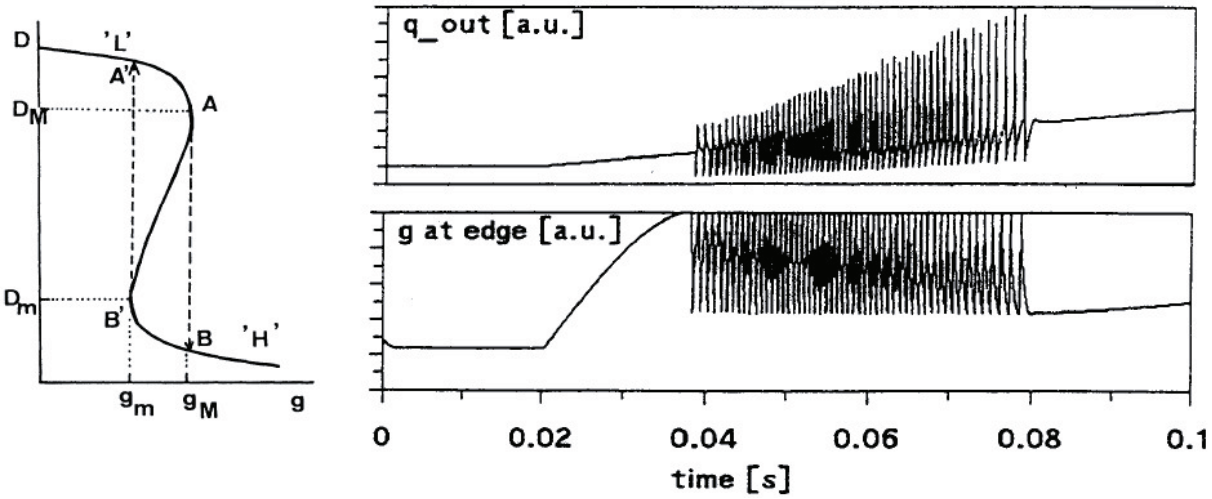

图 1.5　L-H转换的Itoh-Itoh模型，左图的有效输运系数有两个平衡态，一个是输运系数大的L态；一个是输运系数小的H态。在参数g的中间区，两个平衡态共存。右图是基于该模型计算实验参数的结果，显示从L模经过约50ms的dithering过程进入H模，定性上与实验观察接近。取自文献[5–7]。

1.3.3　L-H转换的模型理论

现有L-H转换的理论可分为三类[51]：1. 特定边界不稳定性及相应的湍流抑制；2. 剪切流或带状流抑制湍流；3. 其他机制，如边界条件。各种理论都或多或少有实验依据，但也或多或少有不能解释的实验。最关键的是，这些理论都还无法精确给出L-H转换的功率阈值。多数实验表明，剪切流在抑制湍流中有明显作用。但综合考虑，以上三种模型都应该对L-H转换有影响，但是目前我们甚至还不能确定是单一机制主导而是多种因素的联合作用。

我们这里介绍两种实验人员中较受欢迎的简化模型，分别为Itoh-Itoh等人发展的分叉(bifurcation)模型和Diamond等人发展的prey-predator模型。早期许多其他模型，在Connor&Wilson (2000)[51]和Wagner (2007)[43]的综述中可找到。

1.3.3.1　Itoh-Itoh模型

基于不止一个平衡点存在的分叉模型主要由S.Itoh和K.Itoh在1988年左右开始发展起来的，并在1990年代获得了一些成功。该模型的演化方程为[52]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D(Z)\frac{\partial n}{\partial x}), \tag{1.15}$$

$$\epsilon\frac{\partial Z}{\partial t} = -N(Z;g) + \mu\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \tag{1.16}$$

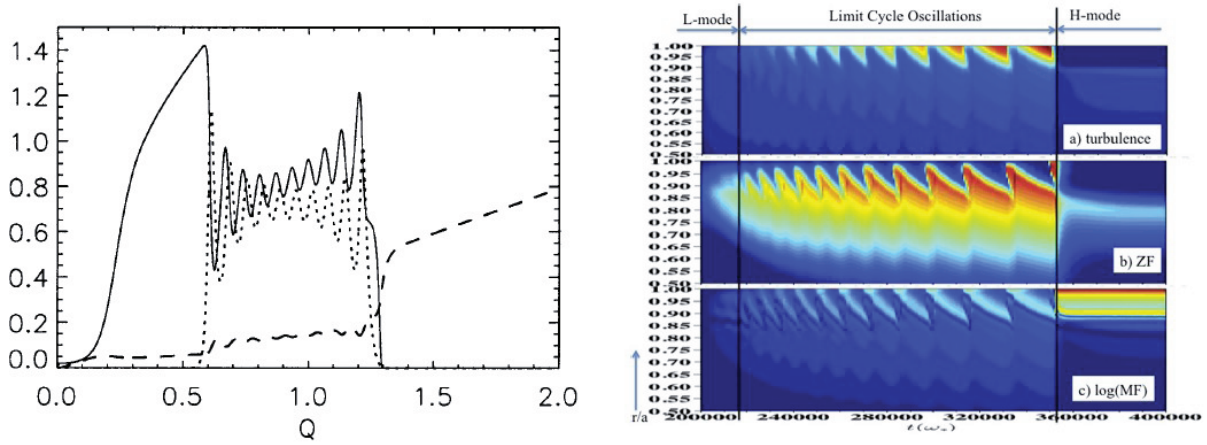

图 1.6 L-H转换的prey-predator模型，左图为零维模型，右图为一维模型，均定性解释了一些实验过程。取自文献[8;9]。

模型中输运系数$D(Z)$和非线性项N分别取

$$D(Z) = (D_{max} + D_{min})/2 + [(D_{max} - D_{min})/2] \tanh Z, \tag{1.17}$$

$$N(Z; g) = g - g_0 + (\beta Z^3 - \alpha Z). \tag{1.18}$$

其中Z为归一化径向电场，这里未提及的其他细节参考原始文献[5;6;52]。以上模型类似于化学中用来分析反应-扩散系统的Ginzburg-Landau 方程。因此，这个模型本质上是把L-H 转换看作类似于化学中的相变。图1.5左图显示在参数g的中间区域，输运系数有两个平衡态，从而通过一些中间过程能导致L-H转换。右图的模拟也确实跟实验的信号很相似。

1.3.3.2 捕食者-猎物模型

捕食者-猎物(prey-predator)模型类比生态系统捕食者和猎物的动态竞争过程，两者数量交互增减，整个过程来回反复，形成循环。Diamond等人从1990年代发展起来的prey-predator模型主要考虑漂移波与带状流间的相互竞争过程。该模型中知名度较高的是Kim-Diamond 2003年[8]的零维模型

$$\partial_t E = EN - a_1 E^2 - a_2 V^2 E - a_3 V_{ZF}^2 E, \tag{1.19}$$

$$\partial_t V_{ZF} = b_1 \frac{E V_{ZF}}{1 + b_2 V^2} - b_3 V_{ZF}, \tag{1.20}$$

$$\partial_t N = -c_1 EN - c_2 N + Q. \tag{1.21}$$

模型中E为湍流强度，$V_{ZF} \propto \partial_r V_E$为带状流(zonal flow)剪切，$V$为平均流(mean flow)剪切，$N$为压强梯度，$a_i$、$b_i$和$c_i$为系数。进一步取近似动量平衡$V = dN^2$，及假设外部功

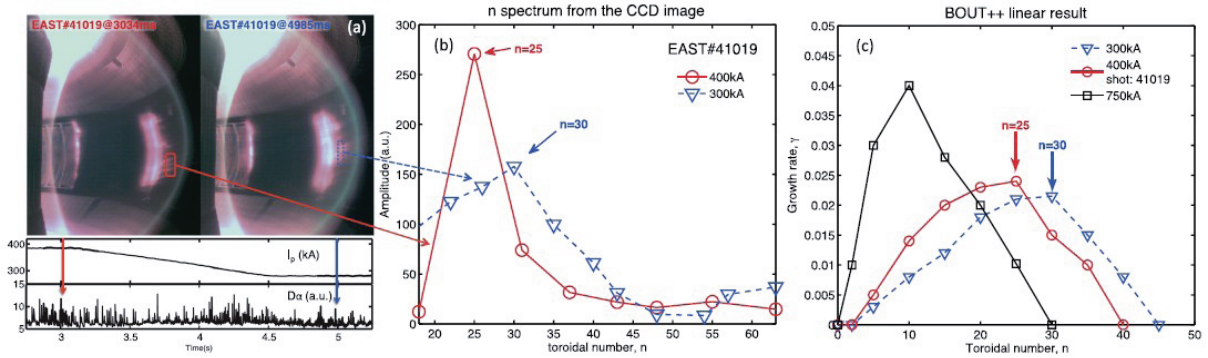

图 1.7　BOUT++模拟EAST实验，能大致预测实验中最不稳定的模的环向模数n。取自文献[10]。

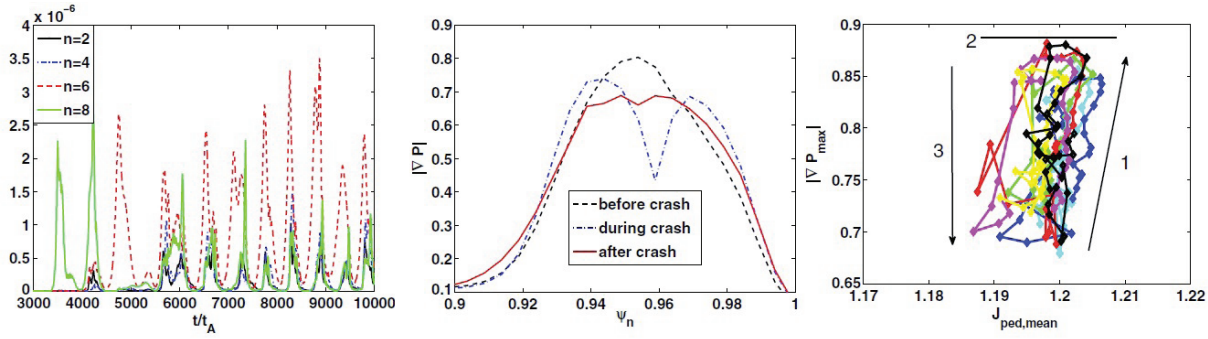

图 1.8　JOREK最近的流体模拟已经大致能得到ELM的振荡循环信号。取自文献[11]。

率$Q = 0.01t$，该模型的一组典型模拟结果显示在图1.6的左图。该模型也已经成功的进一步拓展到含径向空间不均匀的一维模型，如文献[9;53]。

我们应该注意到，这里的各种模型均过于简化，最多只能给出定性的结果帮助理解实验，而无法给出定量结论，且并不能解释所有实验。

1.3.4　H模和ELM的流体研究进展

简化模型有助于给出简单的物理图景理解实验，并且不受多尺度的实验过程影响。其缺点在只能给出定性描述，并且模型中不确定的可调参数太多，无法令人信服。基于原始的多流体或单流体方程，比简化的零维或一维模型在可信度上能更进一步，并且能给出一些定量的结论。流体模拟ELM中较有影响力的主要是BOUT++及JOREK等。基于简化的MHD (reduced MHD)模型，其中主要的不稳定为peeling-ballooning不稳定性。比如，最近BOUT++的模拟(2014)[10]，预测的最不稳定的电磁模的模数n与EAST实验的诊断结果基本一致(图1.7)；JOREK的一个模拟(2015)[11]大致能算出ELM的振荡循环信号(图1.8)。

这些流体模拟，已经能够重现一些实验信号，甚至已经有定量可比的结论，但是其可信性依然是难以保证的。基于BOUT++框架可以有不同的流体模型，不同的模型结果均会

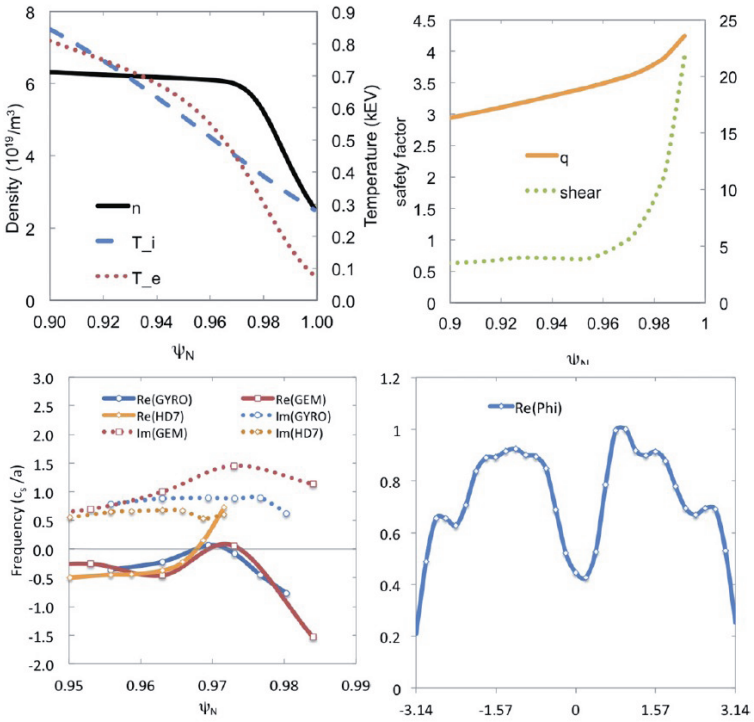

图 1.9　取DIII-D边界H模台基区参数，不同的回旋动理学代码计算的线性微观不稳定性对比。取自文献[12]。

有差别，比如即使是线性物理，六场模型也会与三场模型有不少差别[54]。这些不确定性导致目前已经得到的一些结论在未来依然有变数，比如这里BOUT++预测的模数与实验大致一致可能只是巧合。从简单到复杂的流体模型，一步步增加新物理效应，对比各模型的不同，这种做法也有好处，可以帮助理解哪些实验现象用简单模型就能解释，哪些需要复杂模型。

1.3.5　H模的动理学研究进展

更可靠的结论来自于动理学的第一性原理数值模拟，其参数均是确定的，无自由可调参数，因而初值给定后计算结果是唯一的，而无法通过调节参数去凑出与实验一致的结果。

以前基于第一性原理的动理学理论和模拟研究主要集中在L模或者H模的堆芯区，而对边界的研究较少。主要的工作集中在一些初步的局域线性微观不稳定性模拟以及初略的与实验输运系数对比上。基于第一性原理的动理学模拟研究的主要困难在于台基区强梯度存在时，理论及数值处理的难度远比堆芯弱梯度区大，原有的适用于堆芯的理论模型和数值算法甚至不再能用。图1.9是2012年几个回旋动理学代码的局域线性结果对比，在边界H模强梯度区，甚至代码和代码间的对比都尚不能做到一致，更别说与实验的对比了。

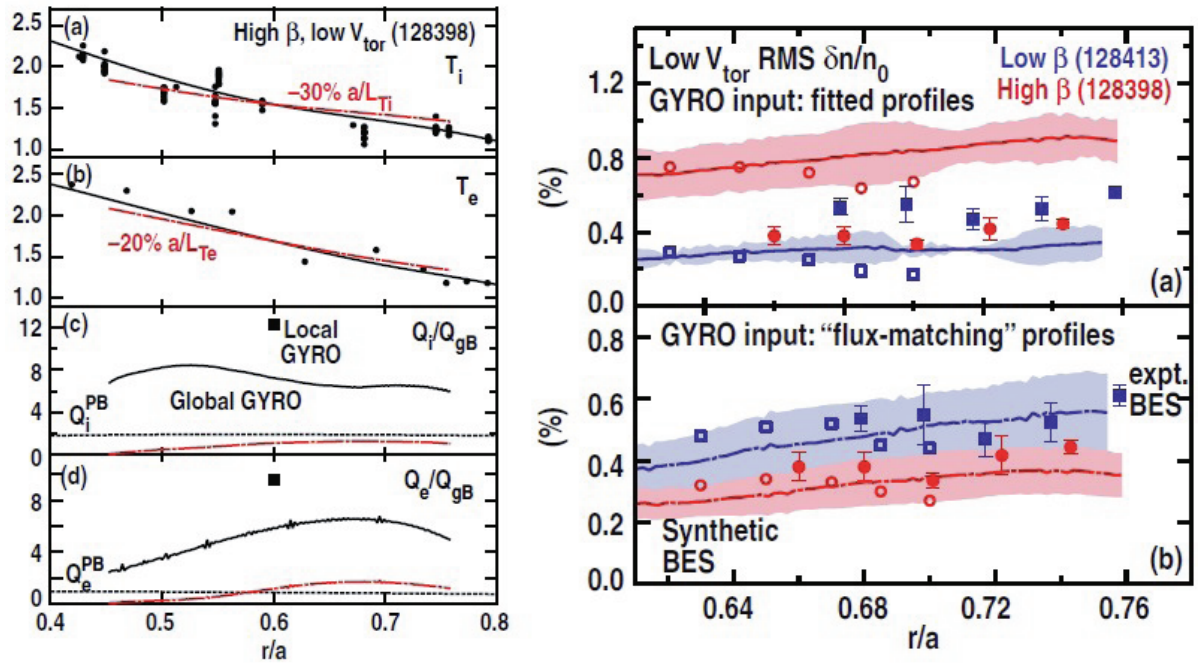

图 1.10　取DIII-D边界H模台基区参数，回旋动理学GYRO代码计算输运系数和密度波动，并与实验对比。取自文献[13]。

图1.10为回旋动理学GYRO代码与DIII-D实验的非线性结果对比，有些模拟结果与实验定性相符，但定量值还不一致。由于回旋动理学只研究微观时间尺度，因此一般假设已经处在准平衡态，也即假设密度、温度和安全因子等的剖面分布已经给定，然后用这些参数值代入模拟代码，再把模拟计算的结果与实验诊断结果对比。总之目前我们还处在用模拟理解和解释实验的初级阶段，离用模拟预测实验的距离则还更遥远。

动理学模拟和理论将是本论文的重点。对于H模台基区其他更细节的一些动理学研究进展将在后面相关章节具体介绍。

1.4　本论文结构

为定位本论文的研究着重点，在图1.11我们画出托卡马克物理研究的不同区域。主等离子体分为堆芯(core)区和边界(edge)区，此前的物理研究大部分集中在堆芯区，其中的不稳定性、约束和输运等从宏观到微观都已经有大量研究，一些关键物理过程也已经广为所知，比如Wesson (2011)[16] 有详尽描述。边界区的研究依然处于初期阶段，许多概念以及物理图景还不明朗，如前面的介绍，提出的一些图景也常常很快就被实验或新的理论推翻。又鉴于理解这个区的物理对弄清H模以及提升约束的重要性，因此边界区物理是目前亟需研究清楚的。刮削层一般指最后闭合磁面附近（或者外面）径向的几厘米区域，与主

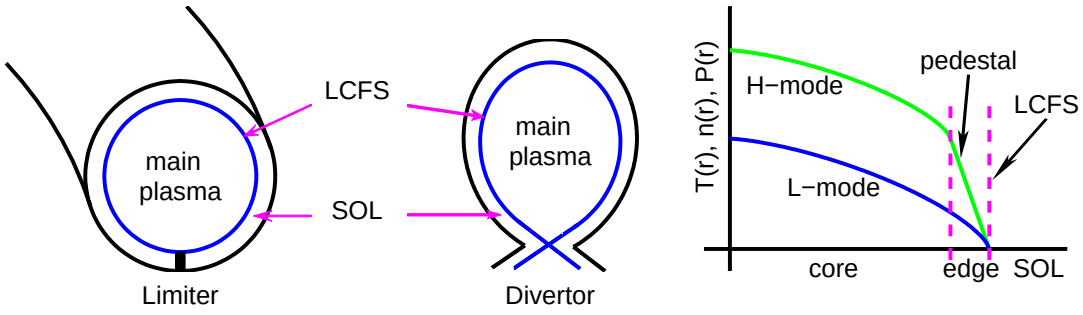

图 1.11　不同托卡马克位形(限制器或偏滤器)的等离子体均被最后闭合磁面(LCFS)分为主等离子体区和刮削层区(SOL)，主等离子体又可分为堆芯(core)区和边界(edge)区。

等离子体的边界区稍有重叠。这个区涉及到边界条件以及等离子体与壁相互作用等更复杂的物理过程。由于温度密度低，一些原子分子过程也需要考虑。关于SOL区的基本物理过程可以参考Stangeby (2000)[55]。SOL区除了现有已理解的物理外，一些有意义的物理研究可能需要等聚变真正实现时才事半功倍。综上，托卡马克的物理研究目前的重点已逐步转移到主等离子体的边界区。

本论文基于前述高约束模式物理机制依然不清楚的背景，重点从基于第一性原理的回旋动理学模拟和理论来研究几种边界常见的微观不稳定性及其湍流输运，并讨论其与H模和L-H转换的相关性，以期最终理解边界区尤其H模下边界区的输运物理。本论文接下来的部分结构安排如下：第2章，介绍微观不稳定性相关的湍流输运及其他基本物理过程。第3章，介绍本论文主要用的计算模型和算法。第4章，讨论托卡马克位形理想磁流体全局本征模。第5章，讨论边界静电微观不稳定性，尤其HL-2A实验的模拟结果。第6章，讨论发现的普遍的非常规气球模结构，提出新理论和新物理理解。第7章，对比强梯度和弱梯度下输运特性的不同。以上三章为本论文核心内容。第8章，讨论边界电磁微观不稳定性，主要讨论动理学气球模的模拟困难。附录论述磁面坐标等基本概念。

2 微观湍流与输运理论概述

要理解边界台基区的微观不稳定性以及它们与H模的关系，我们首先需要理解微观不稳定性，及其导致的湍流与输运的一些基本物理。本章我们首先介绍托卡马克中的典型粒子导心轨道和典型的微观不稳定性，然后讨论碰撞输运以及本文后续要重点关注的湍流输运。

2.1 导心运动

导心轨道的概念主要由Alfven等人在1950年代左右正式发展起来。快速的回旋运动作为快变量，其时间和空间尺度都很小，通常可以平均掉，无需精确描述。对于我们关注的大部分物理问题的尺度，导心运动有时才是最关键的。比如在均匀磁场中，导心运动就是沿磁力线的平行运动，速度为平行磁力线方向的速度，垂直速度导致频率为$\omega_c = qB/m$半径为$\rho_c = mv_\perp/qB$的螺旋运动，不进入导心运动。在托卡马克约为10^0T的磁场中，离子

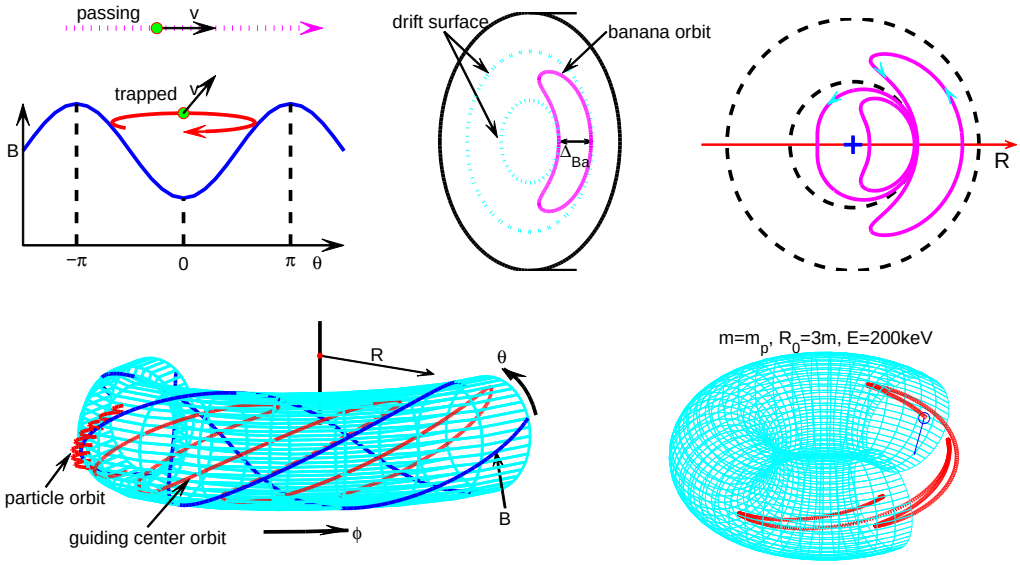

图 2.1 托卡马克中粒子轨道示意图，其中右下角的图为实际参数计算的轨道。

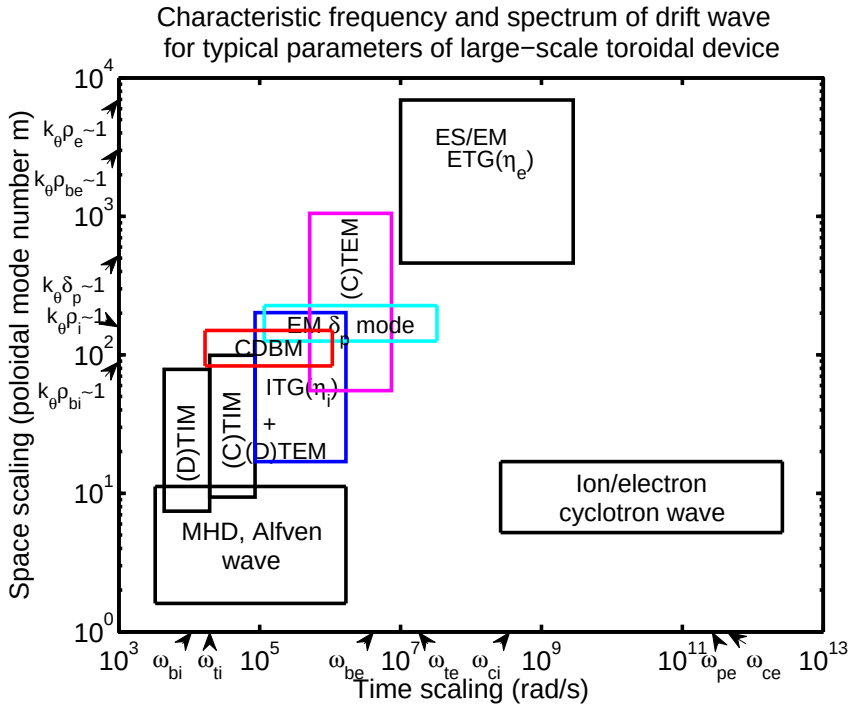

图 2.2　托卡马克中常见波动的特征时间和空间尺度(重作自J. Q. Li原图[14])。

的回旋频率约为10^1MHz，电子回旋频率再高三个量级。对10^0keV温度，离子回旋半径约10^{-1}cm。对聚变3.52MeV的α粒子，回旋半径约厘米量级，依然远小于装置的尺度。考虑到托卡马克典型温度在10^1keV以下，电子相对论能量为0.51MeV，质子为986MeV，离子在托卡马克中无需考虑相对论效应，电子大部分情况也无需考虑相对论效应。

托卡马克本底磁场为强磁场，粒子运动基本沿磁力线螺旋，但在垂直磁力线方向有缓慢的漂移运动。通常涉及的导心漂移运动有，$\mathbf{E}\times\mathbf{B}$漂移、磁场梯度漂移、磁场曲率漂移，具体的公式在第3 章讨论回旋动理学模型时给出。磁力线环绕成磁面，但同一磁面各处的磁场强度不同。环向场$B_t \propto 1/R$，内侧磁场强度大，为高场侧；外侧为低场侧。从而磁力线形成磁阱。磁矩$\mu = v_\perp^2/B$作为绝热不变量守恒，使得平行速度小的粒子被强磁场反弹回来而捕获在磁场势阱中，称为捕获粒子；平行速度大的能通过，称为通行粒子。由于磁场不均匀性引起垂直磁力线方向的其他漂移，粒子运动不会完全沿磁力线，也即会偏离磁面。比如捕获粒子的轨道偏离磁面后一般呈现香蕉状，也称为香蕉粒子。托卡马克中的两类粒子运动轨迹可见图2.1。加入电磁场扰动或者碰撞时，这些约束很好的轨道会被破坏从而导致径向输运。

2.2　微观不稳定性

不稳定性来自系统中自由能。托卡马克中的不稳定性包括宏观(macro)不稳定性

和微观(micro)不稳定性。前者主要是大尺度的不稳定性，也是最先需要克服的，如破裂(disruption)、撕裂模等等，其时间和空间尺度较大，通常是位形空间的不稳定性，最核心的机理由磁流体方程描述。后者主要是小尺度的不稳定性，空间尺度通常小到离子回旋半径量级，时间尺度到微秒量级，通常需要双流体或动理学来描述，波粒共振、有限拉莫半径(FLR)等等都对其有明显影响。漂移波(drift waves)不稳定性属于最主要的一类微观不稳定性。

托卡马克中常见波动的特征时间和空间尺度参见图2.2。本论文主要关注微观不稳定性，比如ITG(离子温度梯度模)、TEM(捕获电子模)等。因此，以下对常见的几种微观不稳定性作简单介绍。微观不稳定性和漂移波详细的综述可参考文献Tang (1978)[56]和Horton (1999)[57]。

对于离子漂移导致的扰动，电子沿磁力线快速运动满足玻尔兹曼关系

$$\delta n_e/n_0 = e\delta\phi/T_e. \tag{2.1}$$

由连续性方程$\partial_t n_i + \nabla\cdot(n_i\mathbf{v}) = 0$，离子密度扰动为

$$\frac{\partial\delta n_i}{\partial t} = -v_x\frac{\partial n_0}{\partial x} = \frac{-ik_y\delta\phi}{B}\frac{\partial n_0}{\partial x}, \tag{2.2}$$

再由准中性条件$\delta n_i \simeq \delta n_e$，立即得到漂移波频率

$$\omega = k_y v_d = k_y\frac{T_e}{eB}\frac{\partial n_0}{n_0\partial x} = -\omega_{*e}. \tag{2.3}$$

以上作了线性化假设，对任一扰动量，写为$\delta f(y,t) = \delta f e^{i(k_y\cdot y-\omega t)}$。这里漂移波为沿离子抗磁漂移方向的纯振荡，扰动电势和扰动密度同相位$\delta\phi \sim \delta n_e$，x方向$E\times B$的速度提供90°相位差$v_x = ik_y\delta\phi/B$。任何破坏密度扰动与电势扰动同相位的机制都可能导致漂移波变得不稳定。比如上述电子扰动变为$\delta n_e/n_0 = (1-i\delta)e\delta\phi/T_e$，则得到$\omega \simeq (1+i\delta)\omega_{*e}$，从而出现漂移波不稳定性。这里的$i\delta$可由碰撞、电子惯性、波粒共振(朗道阻尼)等提供。各种宏观物理量的不均匀性，包括温度、密度、磁场等，都能导致漂移。从而，漂移波不稳定性较为常见。

2.2.1　离子温度梯度模

ITG的主要驱动源为∇T_i，一般位于离子抗磁漂移方向。这支模在平板位形中就存在，在托卡马克位形会有相应修正，或者有额外的分支。ITG机制图可参见图2.3[15]，首先考虑沿极向y方向的温度扰动，它产生的压强梯度导致径向的抗磁漂移，这个漂移速度与磁场

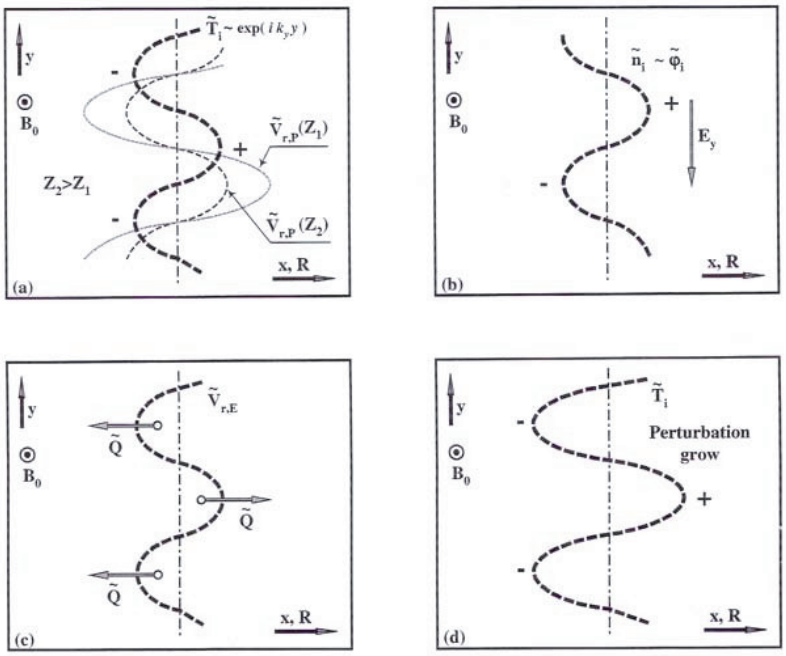

图 2.3　离子温度梯度模的机制[15]。

强度B相关，而B在极向各处不同导致流的漂移速度各处不同，进而导致额外密度扰动。后者导致电势的变形而产生极向电场，接着产生附加的漂移运动和热流，使得温度扰动进一步增加，形成正反馈从而不稳定。

鉴于本论文主要讨论动理学的微观不稳定性，接下来的推导我们从回旋动理学方程出发。这里的ITG和TEM的概述基于Wesson (2011)[16]中的简化推导。完整的方程会较为繁琐，难于解析求解，物理也并不清晰。

忽略捕获粒子效应，考虑的频率远大于捕获粒子的反弹频率，$\omega \gg \omega_{bj}$ $(j = e, i)$，同时假设

$$k_{\parallel} v_{Ti} \ll \omega \ll k_{\parallel} v_{Te}, \tag{2.4}$$

此时电子快速响应，方程(2.1)依然满足。再假设离子磁曲率漂移频率远小于模频率，$\omega_{di} = 2\epsilon_n \omega_{*i} \ll \omega$，其中$\epsilon_n = L_n/R$，$L_n = -(d\ln n/dr)^{-1}$为离子密度梯度尺度，$\omega_{*i}$为离子抗磁频率。平衡速度分布假定为麦氏分布$f_M$，扰动密度为

$$\delta f_i = -\frac{e\delta\phi}{T_i} f_M + g \exp[\frac{ik_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ci}} \sin\alpha_g], \tag{2.5}$$

其中g是回旋相角平均后的非绝热扰动离子分布函数，可通过回旋动理学方程求得，满足

$$g = J_0(z) f_M \frac{\omega - \omega_{*i}^T}{\omega - \omega_{di}} [1 - i\frac{v_{\parallel}}{\omega - \omega_{di}} \frac{\partial}{\partial l} - \frac{v_{\parallel}^2}{(\omega - \omega_{di})^2} \frac{\partial^2}{\partial l^2}] \frac{e\delta\phi}{T_i}, \tag{2.6}$$

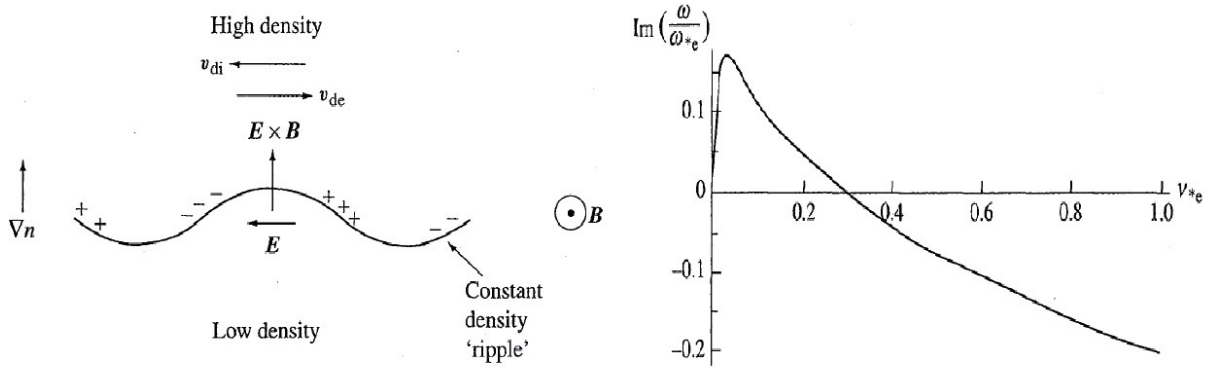

图 2.4　无碰撞捕获电子模不稳定性机制及耗散捕获电子模增长率与碰撞率关系[16]。

其中只展开保留到了二阶，$z = k_\perp v_\perp/\omega_{ci}$。再通过准中性条件

$$\frac{ne\delta\phi}{T_e}(1+\tau) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} v_\perp g J_0(z) dv_\perp dv_\parallel, \tag{2.7}$$

就可得到本征模方程

$$\{\rho_i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\frac{\epsilon_n}{b^{1/2}\tau q\Omega})^2(\frac{\partial}{\partial\theta} + ik_\theta s x)^2 - \frac{2\epsilon_n}{\tau\Omega}(\cos\theta + \frac{i\sin\theta}{k_\theta}\frac{\partial}{\partial x}) - (\frac{\Omega-1}{\tau\Omega+(1+\eta_i)}+b)\}\delta\phi = 0, \tag{2.8}$$

其中s为磁剪切，$b = (k_\theta\rho_i)^2$。径向变量$x = r - r_s$，其中r_s为展开处的有理面$m = nq(r_s)$。径向方向的导数对贝塞尔函数J_0用了小量展开。$\Omega = \omega/\omega_{*e}$为归一化的频率。

参数$\eta_i = L_{ni}/L_{Ti}$对驱动不稳定性起很关键的作用。方程(2.8)有两支解[16]：1.平板分支$\omega \sim (k_\parallel^2 v_{Ti}^2\omega_{*i}\eta_i)^{1/2}$；2. 环位形分支$\omega \sim (\eta_i\omega_{di}\omega_{*i})^{1/2}$。

我们考察环位形分支，在坏曲率侧ω_{*i}和ω_{di}异号，从而ω为虚数，出现不稳定性。

电子温度梯度模(ETG)的机制与ITG类似，但是如图2.2中显示，时空尺度不同，频率和波数均高于本论文后续要讨论的范围，因此本文不考虑。

2.2.2　捕获电子模

捕获粒子模，分为电子模和离子模，一般托卡马克中捕获离子模频率较低，远不如捕获电子模不稳定，重要性处于次要地位，我们这里不讨论。

TEM最基本的不稳定机制是：捕获电子无法沿磁力线自由运动，导致电子密度和静电势相互间的相移(phase shift)，如前所述，这个相移能导致不稳定性。TEM主要在电子抗磁漂移方向(注：在H模下，有可能多支TEMs可被看到，并非所有都是电子抗磁漂移方向)，由∇T_e和∇n共同驱动。

我们先看无碰撞捕获电子模(CTEM)。捕获电子比例为$\sqrt{2\epsilon}$，通行粒子密度扰动依然用玻尔兹曼关系

$$\delta n_{pj} = -n(1-\sqrt{2\epsilon})\frac{e_j\delta\phi}{T_j}, \tag{2.9}$$

捕获电子密度扰动

$$\delta n_{tj} = -n\sqrt{2\epsilon}\frac{e_j\delta\phi}{T_j} + \sqrt{2\epsilon}\int g_{tj}d^3v, \tag{2.10}$$

其中

$$(\omega-\omega_{di})g_{tj} = (\omega-\omega_{*j}^T)f_{Mj}\frac{e_j\delta\phi}{T_j}. \tag{2.11}$$

以上方程代入准中性条件，得到色散关系[16]

$$\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}(\frac{1}{T_e}+\frac{1}{T_e}) = \frac{1}{T_i}\frac{\omega-\omega_{*i}}{\omega-\omega_{di}} + \frac{1}{T_i}\frac{\omega-\omega_{*e}}{\omega-\omega_{de}}. \tag{2.12}$$

取$T_i = T_e$及$\omega_{*j} \gg \omega_{dj}$，得到

$$\omega^2 = \omega_{de}(\omega_{de}+\sqrt{2\epsilon}\omega_{*e}). \tag{2.13}$$

托卡马克这密度随半径增加而减小，$\omega_{*e}>0$，$\omega_{de}<0$，上式在$\sqrt{2\epsilon}RL_n^{-1}>1$时出现不稳定性。

耗散捕获电子模(DTEM)的机制与CTEM的波粒共振不同。电子分布函数响应

$$(\omega+i\nu_{eff})g_{te} = \sqrt{2\epsilon}(\omega-\omega_{*e}^T)f_M\frac{e\delta\phi}{T_e}, \tag{2.14}$$

离子密度扰动响应

$$\delta n_i = n\frac{\omega_{*e}}{\omega}\frac{e\delta\phi}{T_e}. \tag{2.15}$$

再用准中性条件得到色散关系

$$\frac{\omega}{\omega_{*e}} = 1-\sqrt{2\epsilon}\int\frac{\omega-\omega_{*e}^T}{\omega+i\nu_{eff}}f_Md^3v. \tag{2.16}$$

假定上式积分项远小于1，则DTEM频率$\omega\sim\omega_{*e}$，在$\nu_{eff}\gg\omega_{*e}$情况下，增长率为

$$\gamma = \omega_{*e}\sqrt{2\epsilon}\int\frac{\omega_{*e}^T-\omega_{*e}}{\nu_{eff}}f_Md^3v. \tag{2.17}$$

图2.4显示无碰撞捕获电子模不稳定性机制及耗散捕获电子模增长率与碰撞率关系。以上推导作了系列假设且只在局域下成立。更复杂的需要数值解，如FULL代码[58]。

2.2.3　动理学气球模

气球模是由压强梯度(温度密度梯度均可导致压强梯度)驱动的不稳定模，具有电磁特性。动理学气球模(KBM)是理想气球模(IBM)的动理学版本，但有时也归为ITG的电磁版本，即AITG[59]。相较于IBM，它不是纯增长模，而是同时有实频。

最简单的方程形式如下

$$\omega(\omega-\omega_*)=k_\parallel^2 v_A^2+\kappa\cdot\nabla p, \tag{2.18}$$

$\omega_*=0$时，上式就是阿尔芬波(Alfven Wave)和理想气球模的方程。在坏曲率侧，曲率κ与压强梯度∇p方向相反，可以使得右边项小于0，从而出现不稳定性。$\omega_*\neq 0$对理想气球模进行修正，可以改变不稳定阈值以及对IBM引入实频。因此，KBM最本质的驱动与IBM相同，还是来自压强梯度，但各种动理学效应会修正原来的色散关系或者本征模方程。

2.2.4　微撕裂模

微撕裂模(MTM)具有磁扰动，并且也能像撕裂模那样导致磁岛，但它的模数较高，$m\gg 1$。此时撕裂模参数$\Delta'=-2m/r$为负数，标准的电阻磁流体撕裂模是稳定的。动理学效应会修正磁流体的结果，导致不稳定性。微撕裂模的机制较为复杂，但它明显不同于气球模，属于另一支模。尤其模结构的对称性为奇对称，与气球模的偶对称相反。

从实验信号显示的基本特征看，这支模在边界电磁扰动中占有一定作用。不过本文的模型和模拟暂无法很好的处理这支模，因而这里不细讨论。稍详细的入门介绍可参考Wesson (2011)[16]。

2.3　碰撞输运

碰撞输运可以用随机游走模型计算。假设一个粒子初始处在原点，每隔时间Δt以等概率向左或向右移动Δx，经过$N\Delta t$后，粒子处在x。在极限情况下$\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$，$N\to\infty$，$N\Delta t\to t$，粒子处在x位置的概率为$P(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp(-\frac{x^2}{4Dt})$，其中$D=\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$。又可证明该概率恰是扩散方程

$$\frac{\partial P}{\partial t}=D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \tag{2.19}$$

在初值$P(x,0)=\delta(x)$时的解。也即扩散过程的输运系数可以用随机游走的自由程(步长)和碰撞时间来估计$D=l_c^2/\tau_c$，这里自由程l_c就是随机游走的空间步长Δx，碰撞时间τ_c就是随机游走的时间步长Δt。

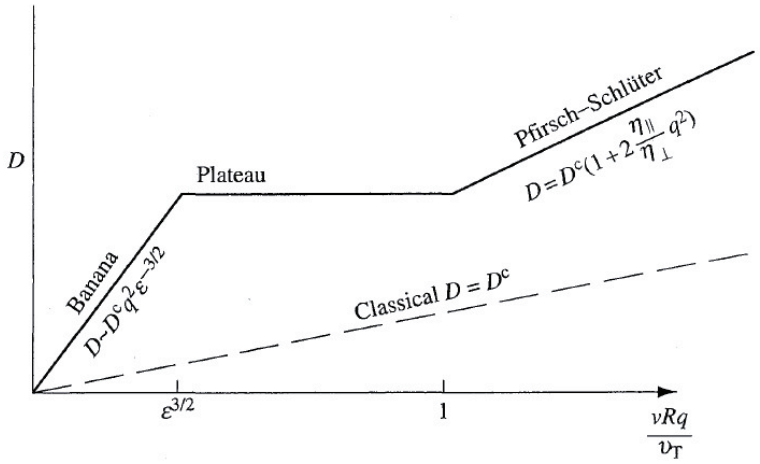

图 2.5　扩散系数随碰撞频率的变化[16]。

考虑柱位形中横越磁力线的碰撞扩散过程，步长为回旋半径$l_c = \rho_c$，碰撞时间由碰撞频率得到$\tau_c = 1/\nu$，所以经典扩散系数为$D_c = \nu\rho_c^2$。在环位形中，由于捕获粒子的存在，步长变为香蕉轨道的宽度$l_c = (q/\epsilon^{1/2})\rho_c$，碰撞时间变为$\tau_c = \epsilon/\nu$，从而输运变大约$q^2/\epsilon^{3/2}$倍。这个输运过程称为新经典(neoclassical) 输运，通常比经典输运大一个量级。

图2.5显示托卡马克中不同的碰撞频率下的新经典扩散系数的理论结果，随着频率的不同分为三个区，小碰撞频率时与经典碰撞的趋势一样，碰撞频率越大扩散系数越大。新经典系数$q^2\epsilon^{-3/2} \sim 10^1$来自于香蕉轨道宽度，以及考虑到了捕获粒子占总粒子的比例，它使得输运系数比经典输运大一个量级。在碰撞频率较大时，平均自由程和碰撞时间进一步改变，进入Pfirsch-Schluter区(此时碰撞率较大，粒子两次碰撞间通常无法完成一个香蕉轨道，“流体”效应占主)。两个区的中间称为平台区。完整的计算，三个区的衔接段是光滑过渡的，并不能严格区分[60]。

基于新经典输运得到的输运系数依然小于实验($\chi_i^{exp} \sim \chi_e^{exp} \sim 1m^2s^{-1}$)，实验上离子热输运可以接近新经典值，但通常依然是大一个数量级，$\chi_i^{exp} \sim 1 - 10\chi_i^{neo}$；而电子的热输运比新经典值大两个量级，$\chi_e^{exp} \sim 10^2\chi_e^{neo}$。这种反常输运通常认为是湍流造成的。磁约束位形中碰撞输运较详细介绍可参考Helander & Sigmar (2001)[61]。

2.4　非线性饱和机制

对于不稳定性模，线性阶段一般是指数增长阶段，当扰动量幅值到一定大小后，非线性效应开始起作用。一般而言，非线性会终结线性增长，导致饱和。饱和的原因在于系统的自由能有限，不能无限增长。或者，要么就是不出现饱和，系统直接垮掉，像托卡马克中的破裂(disruption)等现象。对于出现饱和的情况，饱和的具体机制或者影响因素可以各

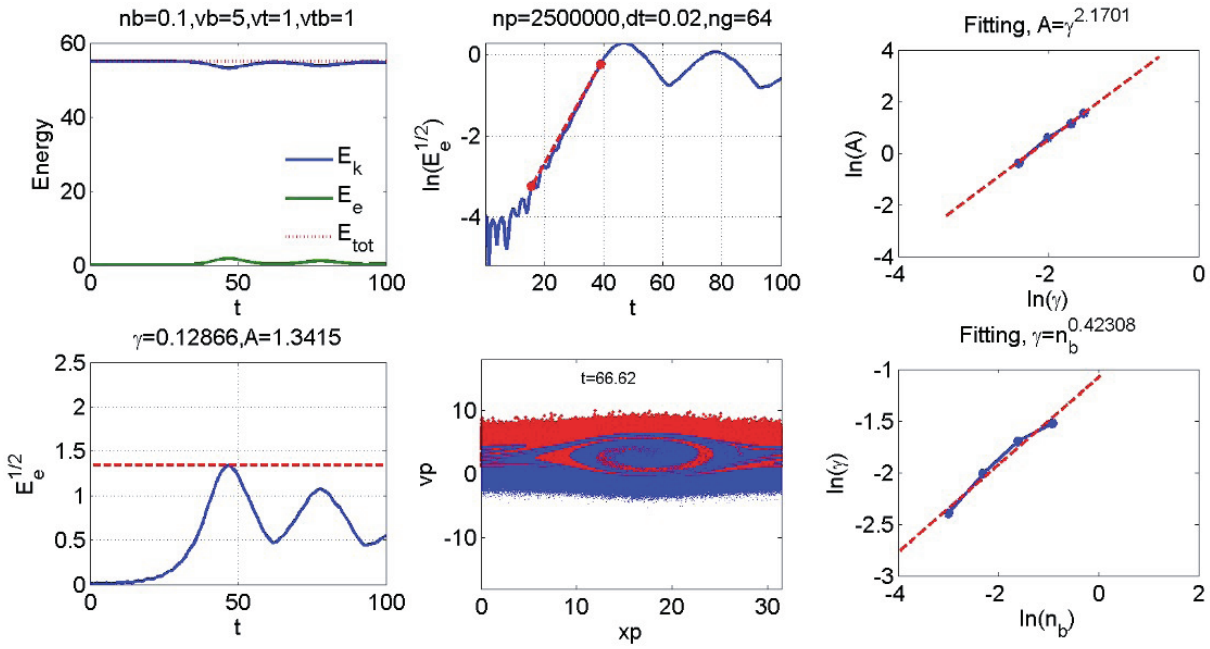

图 2.6　波粒相互作用的静电束流不稳定性的饱和幅与增长率关系。

不相同。对于微观不稳定性，通常的机制是波粒子相互作用、模耦合、带状流抑制等等。

对于线性模增长阶段的频率和增长率，我们常常可以有很精确的定量理论计算；但是非线性的过程极为复杂，甚至连最简单的情况的饱和幅值我们都还无法通过理论给出准确计算。

我们这里主要简介波粒子相互作用导致的饱和。对于带状流在非线性阶段的作用，在2.5节讨论湍流输运时再介绍。本质上，带状流饱和属于模耦合饱和的一种。

波-粒子相互作用的饱和机制，在等离子体中非常常见。这里以O'Neil (1971)[62]的一维静电束流不稳定性模型为例，给出一个可以得到半定量饱和幅值的波粒子相互作用模型。

原始方程为Vlasov-Poisson方程。初始空间均匀分布。初始速度分布为$f = n_0 f_M + n_B f_B$，其中f_M为本底的麦克斯韦分布，f_B为束流分布$f_B = \frac{v_B}{\pi}\frac{1}{(v-v_D)^2+v_B^2}$。在单模主导及小束流($n_B \ll n_0$)假设下，原始方程可简化为无量纲的方程组[62]

$$\ddot{\xi}_j(\tau) = -i\Phi(\tau)\exp[i\xi_j(\tau)] + c.c., \tag{2.20}$$

$$\dot{\Phi}(\tau) = \frac{-i}{M}\sum_{j=1}^{M}\exp[-i\xi_j(\tau)], \tag{2.21}$$

其中归一化量为$\xi_j(t) = k_0 x_j(t)$，$\tau = \omega_0 t(n_B/2n_0)^{1/3}$及$\Phi(t) = -(2n_0/n_B)^{2/3}e\phi_0(t)/(mv_D^2)$。未定义的量及各参数的含义和来源参看原始文献[62]。

以上方程组中$\xi_j(j = 1, 2, \cdots, M)$代表粒子位移，$\Phi$代表静电场电势扰动的幅度。由于这里是无量纲方程，方程的解固定(初始增长然后饱和，并由于波粒子共振幅值上下振荡，

类似图2.6b)，补回量纲后可以代表一系列不同参数的系统的演化。在无量纲情况下，饱和幅值A和增长率γ是常数。我们同时固定系统中其他参数，只使得束流密度n_B可变。补回量纲，立即可得$A \propto n_B^{2/3}$和$\gamma \propto n_B^{1/3}$，从而$A \propto \gamma^2$。也即，电势$|\phi(t)|$的饱和幅值与增长率γ的二次方成正比。这个关系，也常在研究高能粒子激化的阿尔芬本征模(AE)的非线性物理中用到，如Zhu et al (2013)[63]。

图2.6给出的是无近似的直接粒子模拟结果，采用标准PIC算法[64]，可以看到电势的饱和幅值确实接近理论预测$A \propto \gamma^{2.17} \simeq \gamma^2$及$\gamma \propto n_b^{0.42} \simeq n_b^{1/3}$，但是并不与理论精确相等。这里除了模拟本身有噪声而不完全精确外，更主要的原因是理论结果作了系列简化，只在小参数范围内(比如增长率$\gamma \ll \omega_r$，束流密度$n_b \ll n_0$等)适用。也即，实际的情况远比目前理论能计算的要复杂。

无量纲化的过程相当于寻找系统中的标度不变关系，这在估计复杂的输运过程也是有用的手段之一。

2.5 湍流输运

2.5.1 混合长度模型

混合长度(mixing length)模型最早由普朗特(L. Prandtl)在20世纪早期研究流体动力学时作为一种粗略估计的近似模型而提出，用来描述湍流雷诺协强(Reynolds stresses)导致的动量转移，但后来却因为其简单直观而被广泛使用。混合长度的概念与统计力学中的平均自由程(mean free path)的概念可以在形式上对比，比如横越磁场输运系数可以用如下公式估计(对比2.3节的碰撞输运)

$$D_\perp = \frac{l_c^2}{\tau_c}, \tag{2.22}$$

其中的关联长度l_c相当于自由程，关联时间τ_c类似于碰撞时间。这个图景较为直观，但是实际使用中主要问题在，关联长度和关联时间又该如何估计，它远没有碰撞输运中那么简单。不同的模型对l_c和τ_c有不同的假设，从而可以得到不同的标度率。比如，关联时间可用增长率估计$\tau_c \propto 1/\gamma$，关联长度用垂直波长估计$l_c \propto 1/k_\perp$，得到$D_\perp = c\gamma/k_\perp^2$，其中$c$为待定系数。这种情况，增长率大时输运大。

混合长度模型对饱和幅的估计基于如下假设：扰动幅度的大小导致扰动梯度与平衡梯度相等时扰动饱和不再增长。对于漂移波，密度扰动$k_\perp \delta n_k \sim n_0/L_n$，绝热假设下密度扰动与电势扰动由玻尔兹曼关系得到$\delta n_k/n_0 = e\delta\phi_k/T$，从而饱和幅度$e\delta\phi_k/T \sim 1/k_\perp L_n$。这个关系在一些实验中也确实大致满足[Wesson (2011) p208][16]，再根据准线性关系，同样得

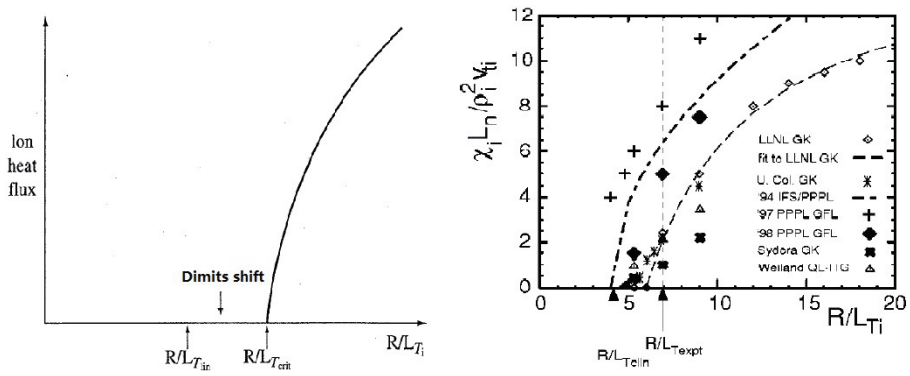

图 2.7　多个回旋动理学和回旋流体代码的模拟显示超过临界梯度时，随着梯度增加，热输运系数增加[17]。

到$D_\perp \sim \gamma/k_\perp^2$。

2.5.2　湍流输运一般理论

在2.4节中提及的标度不变和2.5.1小节的混合长度模型，在估计和理解湍流输运中经常用到。比如可假设如下标度不变关系，对波动幅度[16]

$$\frac{e\delta\phi}{T} = c\frac{\rho_s}{L_n}, \tag{2.23}$$

或对输运系数

$$D = cD_{gB}, \tag{2.24}$$

其中$D_{gB} = (\rho_s/L_n)D_B$为回旋玻姆(gyro-Bohm)系数，$D_B = T/eB$为玻姆系数。这里假设定标关系中的系数c是关于其他参数的函数，比如等离子体比压β，碰撞率ν_*等。在弱梯度的离子温度梯度模回旋动理学模拟中[65]，发现随着a/ρ_i增加，系数c在变化，使得输运从玻姆定标增加到回旋玻姆定标。

各种不稳定性导致的湍流输运的解析模型有许多，大部分早期的都列在Horton (1990)[66]的综述中。这些解析模型假设较多，而且结果各不相同，适用范围也均有限。1990年代，随着超级计算技术的兴起，基于回旋动理学的大规模数值模拟称为研究湍流输运的主要工具，可提供更为可靠的输运系数。2000 年的一次基于系列回旋流体和回旋动理学代码的模拟对比中[17]，各代码结果基本一致，从而图2.7 中的两个结论基本成为磁约束聚变模拟领域中的共识：1. 非线性的临界梯度比线性临界不稳定性的梯度稍大(相差的大小称为Dimits shift)；2. 梯度越大，输运系数越大。这一结论与前文混合长度模型估算是一致的。

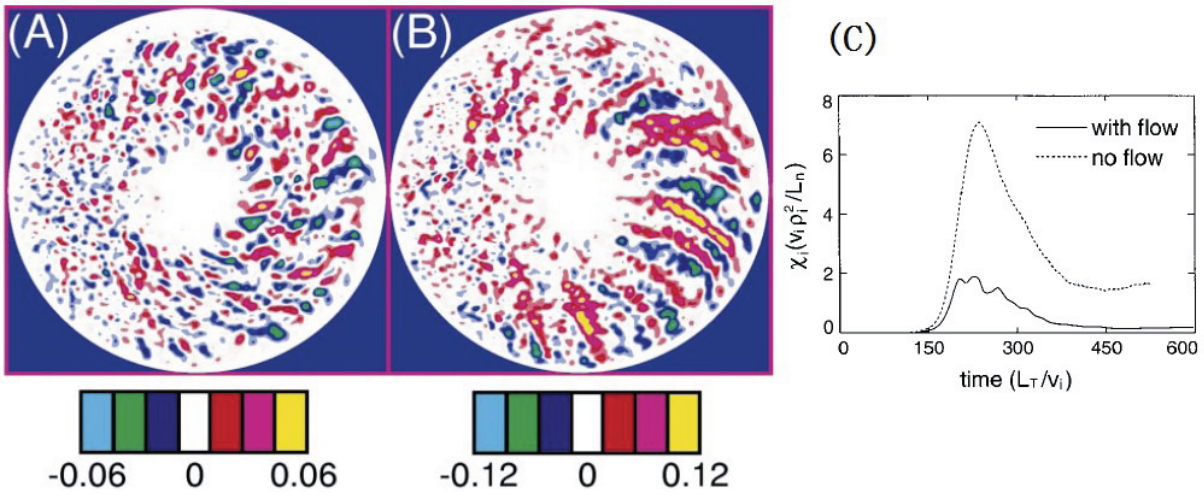

图 2.8　带状流通过打乱径向的川流(streamer)结构而明显的抑制输运[18]。

实验中H模的边界区压强梯度很强，L模的边界区压强梯度较弱，但H模的输运并未比L模明显增加。也即，要用湍流输运的图景理解实验，那么应该要求湍流输运在梯度较大时输运系数变小(因为输运通量大小等于输运系数乘以梯度)。直觉上以及前面的混合长度模型均应该是梯度越大增长率越大从而输运越大，而且图2.7 也确实支持这一结论。那么是否说单纯的湍流输运无法解释H 模呢？我们注意到上述模拟是有条件的，首先它的不稳定性只是静电的ITG，再就是它的梯度并未到实验L-H 转换的梯度(如HL-2A，边界转换梯度约$RL_n^{-1} = 80$)，也即参数扫描依然只在L 模的弱梯度下。本论文的工作显示这一图景确实在强梯度下改变，也即超过某一梯度后，梯度增加，输运系数不增反降，从而为实验的H 模的出现提供了可能的微观输运机制。具体见第7 章。

实验上漂移波湍流综述可参考Tynan et al. (2009)[67]。湍流输运理论更细节的描述可参考Horton (2012)的专著[68]。较简短的回旋动理学湍流输运模拟综述见Garbet et al. (2010)[69]。

2.5.3　带状流

带状流(zonal flow)是环向和极向模数均为零($n = 0$，$m = 0$)的扰动量，它被发现在抑制湍流输运中有重要作用，如图2.8的模拟显示有带状流和去掉带状流对应的输运水平完全不同。物理上，这可以从关联长度来理解。去掉带状流时，径向电势扰动的小结构的大小(eddy size)较大，关联长度较大；保留带状流($k_r \neq 0$)时会打乱径向的结构，使得小结构变小，关联长度变小，从而输运得到明显抑制。

图2.8中的带状流是零频带状流，电势扰动和密度扰动均$n = 0$，$m = 0$。还有另一支非零频的低频带状流，称为测地声模(GAM)，其电势扰动依然$n = 0$，$m = 0$，但密度扰

动$n=0$，$m=1$。其频率约为$\omega_{GAM}^2=2\frac{c_s^2}{R^2}(1+1/2q^2)$[70]，其中$c_s=\sqrt{\gamma p/\rho}$为离子声速。理论上，更精细的动理学计算GAM的频率和无碰撞阻尼率以及非均匀非线性的讨论也在近十年取得不少进展[71–73]。模拟和实验中，GAM与湍流的相互作用也确实观察到[74]。

漂移波激发带状流较成功的一个理论与模拟结果可参考Chen et al (2000)[75]，其中线性的漂移波作为泵波(pump wave)因带状流而饱和。这个结果较为重要在于它是讨论托卡马克非线性物理极少有的定量理论。带状流的详细讨论可以参考Diamond等人(2005)的综述[76]。以前大部分对带状流抑制输运的理论和模拟工作都是在弱梯度下进行的，在强梯度下是否依然成立并无太多证据。这是本论文要研究的一个主要点之一，模拟中发现强梯度下带状流抑制湍流的作用很小，具体见第5章。

2.5.4　其他简化模型

我们附带提及Hasegawa-Mima和Hasegawa-Wakatani模型。1970年代前的等离子体湍流模型主要基于准线性假设或者只适合于弱湍流。Hasegawa-Mima模型(1977)[77]是等离子体物理中第一个成功的强湍流模型。对应的稍复杂的特别针对边界等离子体的为Hasegawa-Wakatani(1983)模型[78]，该模型为电势扰动ϕ和密度扰动n的非线性耦合模型，从这个模型可以得到Bohm类型的粒子输运系数$D\simeq T_e/eB_0$以及Kalmogorov类型的幂次波数谱k^{-3}[78]。由于H-M和H-W模型的简单性，在大规模并行动理学模拟未正式发展起来的1980年代，通常以该模型为出发点研究托卡马克中静电和电磁湍流输运，比如文献Waltz (1986)[79]有很好的介绍。但是由于这个模型的简化，尤其其只有密度和电势扰动而未包含其他扰动量，其能讨论的物理过程有限或者并不够准确，从而已经很少作为定量模型来使用。这从另一个侧面也反映了湍流输运研究的困难和复杂性。

3 理论模型和数值方法

本章论述本文模拟采用的理论模型和数值方法。本论文涉及流体和动理学模型，数值方法上涉及初值模拟和本征值求解。模拟部分主要采用回旋动理学粒子模拟代码GTC (Gyrokinetic Toroidal Code)[18;80–83]，本征值求解中针对待求解的问题发展新的处理方法。因此，本章主要介绍GTC代码的理论模型和方程，以及本征值问题的解法。

3.1 回旋动理学粒子模拟

原则上，托卡马克中的湍流输运物理需要用三维空间相对论全动理学(full-kinetic，FK)方程及完整的麦克斯韦方程组描述。但是其求解极为困难，即使是当前世界最快的计算机也还无法真正用求解这组方程来有效的研究托卡马克中的输运物理。对于托卡马克这种带有零阶稳态平衡导向场的等离子体系统，回旋动理学(gyro-kinetic，GK)的简化降维通常是很有用的。它将六维相空间降为五维，从而极大简化了问题，延长了模拟的时间尺度。又由于大部分粒子能量比较低，非相对论的描述通常足够，除了像逃逸(run away)电子等少数特例。GK计算中用到的量级假设为[84]

$$\frac{\omega}{\Omega} \sim \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \sim \frac{\delta B}{B_0} \sim \frac{e\delta\phi}{T} \sim O(\delta) \ll 1, \tag{3.1}$$

这里，ω，$k_{\parallel}$和$k_{\perp}$分别为扰动量的特征频率、平行和垂直波矢，Ω为(离子)回旋频率，δB和$\delta\phi$分别为扰动磁场和静电势，B_0为平衡磁场，T为温度。特别注意，$k_{\parallel}/k_{\perp} \ll 1$的假设本来是没有的，但是如果无此假设，回旋动理学方程推导时，部分地方无法作量级展开。如何在回旋动理学方程中去掉这一假设从而使得方程的适用范围更广依然是一个难题。回旋动理学方程和漂移动理学(drift kinetic，DK)方程对于粒子运动的描述都是用导心轨道。不同在于后者假设回旋半径为零，有限拉莫半径(FLR)效应不进入场方程。大部分情况我们可以认为DK是GK的回旋半径趋于零的极限。但并不完全如此，比如DK中不要求$k_{\parallel}/k_{\perp} \ll 1$。

表 3.1　国际上部分主要的回旋动理学代码

-	粒子法(PIC，拉格朗日坐标)	网格法(continuum，欧拉坐标)
线性	AWECS[85]	FULL[58], HD7[86]
非线性	GTC[18;80;81], GEM[87;88], XGC1[92;93], ORB5[94]	GS2[89], GYRO[90], GENE[91], GKW[95], GKV[96;97]

3.1.1　回旋动理学代码

基于第一性原理(全动理学或回旋动理学)的大规模数值模拟通常有两种方法，一种是粒子模拟法(partilce-in-cell，PIC)，相空间的点是一个个粒子，从拉格朗日的随流坐标中看问题，通过Monte-Carlo方法对相空间粒子采样求解其运动方程；另一种是连续(网格)法，从欧拉的固定坐标中看问题，直接对相空间进行离散，用求解偏微分方程的方法求解粒子相空间的动理学方程。两种方法的场方程求解较为类似，都是直接解偏微分方程。根据所解决的物理问题的特点，它们又可分为线性和非线性两种。非线性一般只能初值法求解。线性的求解则即可用初值法，又可用本征值法。初值法一般是系统中增长最快或阻尼最慢的那支或几支才能较好的区分，而本征法原则上可以获得系统中所有线性解。国际上部分较有名的回旋动理学代码见表3.1。

GTC[1](Gyrokinetic Toroidal Code)代码主要由Z. Lin在1990年代在普林斯顿等离子体物理实验室(PPPL)发展起来的[98]，此后主要在加州大学尔湾分校UCI开发。目前国内已有多家单位引进了该代码进行二次开发和物理模拟工作。GTC代码粒子推动部分采用R.B.White基于磁坐标的导心运动方程，原始形式为White发展的ORBIT (1980)[99]单粒子导心轨道代码。GTC的回旋平均[100]发展了W. W. Lee发明的四点平均方法(1983,1987)[101;102]，场方程则采用了W.W.Lee发现的回旋动理学泊松方程以及简化的Maxwell方程组，经过近20年持续不断的努力才达到目前的状态。GTC是磁约束聚变领域中第一个全局性大规模并行模拟代码。最近这十几年，大规模数值模拟成为研究磁约束聚变湍流输运等重要非线性物理的主要工具，许多重要的理论进展是由模拟在推动。这有多方面原因，其一是理论上能解析处理的大部分已经知道；其二是，科学计算的快速发展使得大规模模拟越来越可行；其三，新理论的发展也越来越依靠模拟的发现提供证据或者出发点。

[1] phoenix.ps.uci.edu/GTC/

3.1.2 GTC电磁动理学模型

完整的非线性回旋动理学方程综述可参考Brizard&Hahm (2007)[84]，GTC电磁模型的方程参考Holod et al (2009)[81]。以下描述中未提及的可参考原始论文[81;82]。GTC中求解的原始的回旋动理学方程为

$$\frac{d}{dt}f_\alpha(\boldsymbol{X},\mu,v_\parallel,t)\equiv\big[\frac{\partial}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{X}}\cdot\nabla+\dot{v}_\parallel\frac{\partial}{\partial v_\parallel}-C_\alpha\big]f_\alpha=0, \tag{3.2}$$

$$\dot{X}=v_\parallel\frac{\boldsymbol{B}}{B_0}+\boldsymbol{v}_E+\boldsymbol{v}_g+\boldsymbol{v}_c, \tag{3.3}$$

$$\dot{v}_\parallel=-\frac{1}{m_\alpha}\frac{\boldsymbol{B}^*}{B_0}\cdot(\mu\nabla B_0+Z_\alpha\nabla\phi)-\frac{Z_\alpha}{m_\alpha c}\frac{\partial A_\parallel}{\partial t}, \tag{3.4}$$

其中$\alpha=e,i$表示系统中电子、离子等不同粒子种类，C_α为碰撞算符(GTC中默认为Fokker-Planck形式)。$\boldsymbol{X}$是回旋中心位置，μ是磁矩，$v_\parallel$为平行速度，Z_α和m_α分别为粒子的电荷量和质量，$\boldsymbol{B}_0$为平衡磁场，$\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{B}_0/B_0$为单位磁场矢量，$\phi$和$A_\parallel$分别为回旋相位平均的静电势和平行磁势。垂直磁势$\boldsymbol{A}_\perp$主要与压缩阿尔芬波相关，在低$\beta$时，GTC的模型暂时忽略此项。也即，$\delta B_\parallel=0$，$\delta\boldsymbol{B}=\delta\boldsymbol{B}_\perp=\nabla\times\lambda\boldsymbol{B}_0$，其中$\lambda=A_\parallel/B_0$。相应的其他变量为

$$\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{B}_0^*+\delta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\frac{v_\parallel}{\Omega_\alpha}\boldsymbol{b}_0\times\nabla\boldsymbol{B}_0+\delta\boldsymbol{B}, \tag{3.5}$$

$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$漂移速度

$$\boldsymbol{v}_E=\frac{c\boldsymbol{b}_0\times\nabla\phi}{\boldsymbol{B}_0}, \tag{3.6}$$

梯度∇B漂移速度

$$\boldsymbol{v}_g=\frac{1}{m_\alpha\Omega_\alpha}\mu\boldsymbol{b}_0\times\nabla B_0, \tag{3.7}$$

曲率漂移速度

$$\boldsymbol{v}_c=\frac{1}{\Omega_\alpha}v_\parallel^2\nabla\times\boldsymbol{b}_0. \tag{3.8}$$

对于静电问题，所有磁扰动均不考虑，耦合的场方程为回旋动理学泊松方程

$$\frac{Z_i^2n_i}{T_i}(\phi-\bar{\phi})=4\pi(Z_in_i-en_e), \tag{3.9}$$

定义

$$\bar{\phi}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\phi(\boldsymbol{X})f_{0i}(\boldsymbol{X},\mu,v_\parallel)\delta(\boldsymbol{X}-x+\boldsymbol{\rho}_i)d\boldsymbol{X}d\mu dv_\parallel d\sigma, \tag{3.10}$$

其中$n_\alpha=\int f_\alpha d\boldsymbol{v}$是回旋相位平均回旋中心(gyrophase-averaged gyrocenter)密度，$\bar{\phi}$为回旋平均电势，$f_{0i}(\boldsymbol{X},\mu,v_\parallel)$是离子回旋中心平衡分布函数，$\boldsymbol{\rho}_i=\boldsymbol{v}_{i\perp}\times\boldsymbol{b}_0/\Omega_i$是离子回旋半径矢量，$\Omega_i$是离子回旋频率，$\sigma$是回旋相角。

对于电磁问题，场方程中需要补上安培定律

$$\nabla_{\perp}^{2}A_{\parallel}=\frac{4\pi}{c}(en_{e}u_{e\parallel}-Z_{i}n_{i}u_{i\parallel}), \tag{3.11}$$

其中$n_{\alpha}u_{\alpha\parallel}=\int v_{\parallel}f_{\alpha}d\boldsymbol{v}$。速度空间积分满足$\int d\boldsymbol{v}\equiv\frac{\pi B_{0}}{m}\int dv_{\parallel}d\mu$。

为了有效的利用平衡磁场的对称性，托卡马克中，我们通常采用磁面坐标(ψ,θ,ζ)，ψ为极向磁通，θ为极向角，ζ为环向角。磁场通常写为协变形式

$$\boldsymbol{B}_{0}=\delta\nabla\psi+I\nabla\theta+g\nabla\zeta, \tag{3.12}$$

逆变式为

$$\boldsymbol{B}_{0}=q\nabla\psi\times\nabla\theta-g\nabla\psi\times\nabla\zeta, \tag{3.13}$$

得到坐标变换的雅可比(Jacobian)为

$$J^{-1}=\nabla\psi\cdot\nabla\theta\times\nabla\psi=\frac{B_{0}^{2}}{gq+I}. \tag{3.14}$$

3.1.3 导心轨道

在托卡马克位形的磁面坐标中，粒子导心运动方程为[103]

$$\dot{\zeta}=\frac{\rho_{\parallel}B^{2}}{D}(q+\rho_{\parallel}I')-(\mu+\rho_{\parallel}^{2}B)\frac{I}{D}\frac{\partial B}{\partial\psi}-\frac{I}{D}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi} \tag{3.15}$$

$$\dot{\theta}=\frac{\rho_{\parallel}B^{2}}{D}(1-\rho_{\parallel}g')+(\mu+\rho_{\parallel}^{2}B)\frac{g}{D}\frac{\partial B}{\partial\psi}+\frac{g}{D}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi} \tag{3.16}$$

$$\dot{\psi}=-\frac{g}{D}(\mu+\rho_{\parallel}^{2}B)\frac{\partial B}{\partial\theta}+\frac{I}{D}(\mu+\rho_{\parallel}^{2}B)\frac{\partial B}{\partial\zeta}+\frac{I}{D}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}-\frac{g}{D}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho_{\parallel}}=&-\frac{(1-\rho_{\parallel}g')(\mu+\rho_{\parallel}^{2}B)}{D}\frac{\partial B}{\partial\theta}-\frac{(1-\rho_{\parallel}g')}{D}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\\&-\frac{(q+\rho_{\parallel}I')}{D}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}-\frac{(q+\rho_{\parallel}I')(\mu+\rho_{\parallel}^{2}B)}{D}\frac{\partial B}{\partial\zeta}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

这里$\rho_{\parallel}=\frac{v_{\parallel}}{\Omega_{\alpha}}\equiv\frac{m_{\alpha}}{Z_{\alpha}B_{0}}v_{\parallel}$为“平行回旋半径”，带撇导数$I'\equiv\frac{dI}{d\psi}$和$g'\equiv\frac{dg}{d\psi}$。

3.1.4 GTC电子流体模型

由于电子的回旋半径非常小，因而可以采用漂移动理学方程。在GTC中，为了获得更好的数值性能，电子采用的是流体- 动理学混合(fluid-kinetic hybrid)模型[81;104]。基本思想是基于$m_e/m_i \ll 1$展开，把电子的响应分为绝热的流体部分和高阶的动理学部分。

流体电子密度扰动方程

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + B_0 \mathbf{b_0} \cdot \nabla(\frac{n_0 \delta u_{\parallel e}}{B_0}) + B_0 \mathbf{v}_E \cdot \nabla(\frac{n_0}{B_0}) - n_0(\mathbf{v}_* + \mathbf{v}_E) \cdot \frac{\nabla B_0}{B_0} = 0, \tag{3.19}$$

其中$\mathbf{v}_* = \frac{1}{n_0 m_e \Omega_e} \mathbf{b}_0 \times \nabla(\delta P_\parallel + \delta P_\perp)$，$\delta P_\perp = \int d\mathbf{v} \mu B_0 \delta f$，$\delta P_\parallel = \int d\mathbf{v} m v_\parallel^2 \delta f$，$n_0 = \int d\mathbf{v} f_0$，$\delta n_e = \int d\mathbf{v} \delta f_e$。电子平行流速度可通过Ampere定律得到

$$n_0 e \delta u_{\parallel e} = \frac{c}{4\pi} \nabla_\perp^2 \delta A_\parallel + n_0 Z_i \delta u_{\parallel i}. \tag{3.20}$$

非绝热部分

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_e} L \delta h_e = \frac{dw_e}{dt} =& (1 - \frac{\delta f_e^{(0)}}{f_{0e}} - w_e)[-\mathbf{v}_E \cdot \nabla \ln f_{0e}|_{v_\perp} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta f_e^{(0)}}{f_{0e}} - \mathbf{v}_d \cdot \nabla \frac{\delta f_e^{(0)}}{f_{0e}} + \\ & \frac{e}{T_e} \mathbf{v}_d \cdot \nabla \phi - \frac{c \mathbf{b}_0 \times \nabla \langle \phi \rangle}{B_0} \cdot \nabla \frac{\delta f_e^{(0)}}{f_{0e}} + \frac{e v_\parallel}{c T_e} \frac{\partial \langle A_\parallel \rangle}{\partial t}], \end{aligned} \tag{3.21}$$

其中$w_e \equiv \delta h_e / f_e$。一阶修正的场量

$$\frac{e \phi_{eff}^{(1)}}{T_e} = -\frac{\delta n_e^{(1)}}{n_{0e}}, \tag{3.22}$$

其中$\delta n_e^{(1)} = \int d\mathbf{v} \delta h_e$。

该模型最低阶为流体响应，但高阶包括捕获电子模。第5章中判断系统中的不稳定性是否为捕获电子模采用的就是打开和关闭高阶动理学电子响应看系统中不稳定性是否明显改变的方法。如果不稳定性特性明显改变，则系统中捕获电子效应重要；反之则不重要。该模型如果只保留电子流体响应，同时去掉离子响应，则退化为纯流体模拟。第4章中理想气球模的模拟采用的是这种方法。

3.2 本征方程及其求解

在等离子体物理中，尤其磁约束聚变领域，大部分情况，本征值问题是通过迭代法求解的，尤其常用的是打靶法(shooting method)。迭代法通常会遇到两个困难：1. 所求的根是否为实际需要的依赖于初值的选取；2. 迭代经常难于收敛。而且对于我们后文要遇到的

问题，经常需要知道本征方程在一定区域根的分布情况，这样传统迭代算法往往比较局限，需要发展新的算法。

所幸对于能简化为标准矩阵本征值问题$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{BX}$的本征系统有比较成熟的算法，可直接调用库函数，如QR分解等，无需初值就能一次性给出该矩阵系统的所有根，或者可在初值附近求出系列根。因此对于本论文中的本征系统主要问题就转化为：如何把原问题化为标准矩阵形式。

下面提供一个求解本征方程具体算例。一个常见的等离子体本征值方程，比如方程(4.4)可化为

$$-\frac{d^2\phi}{d\vartheta^2}+\frac{p}{r}\frac{d\phi}{d\vartheta}+\frac{q}{r}\phi=\lambda\phi, \tag{3.23}$$

其中$p=2(s\vartheta-\alpha\sin\vartheta)(s-\alpha\cos\vartheta)$，$q=\alpha[\cos\vartheta+(s\vartheta-\alpha\sin\vartheta)\sin\vartheta]$，$r=-[1+(s\vartheta-\alpha\sin\vartheta)^2]$及$\lambda=\omega^2/\omega_A^2$。离散$\vartheta$成$\vartheta_j=j\Delta\vartheta$ $(j=1,2,\ldots,N_\vartheta)$，使用中心差分，方程(3.23)化为

$$-\frac{\phi_{j+1}-2\phi_j+\phi_{j-1}}{\Delta\vartheta^2}+\frac{p_j}{r_j}\frac{\phi_{j+1}-\phi_{j-1}}{2\Delta\vartheta}+\frac{q_j}{r_j}\phi_j=\lambda\phi_j, \tag{3.24}$$

其中$p_j=2(s\vartheta_j-\alpha\sin\vartheta_j)(s-\alpha\cos\vartheta_j)$，$q_j=\alpha[\cos\vartheta_j+(s\vartheta_j-\alpha\sin\vartheta_j)\sin\vartheta_j]$，$r_j=-[1+(s\vartheta_j-\alpha\sin\vartheta_j)^2]$及$\phi_j=\phi(\vartheta_j)$。边界条件取原点偶对称$\phi_1=\phi_0$ $(\phi_0'=0)$和无穷远点为零$\phi_{N+1}=0$ $(\phi_\infty=0)$。方程(3.24)写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}, \tag{3.25}$$

其中$\boldsymbol{X}$是$N(=N_\vartheta)$维矢量，$x_j=\phi_j$，$\boldsymbol{M}$为$N\times N$维方阵。把(3.24)显式写出来，得到$\boldsymbol{M}$的各非零矩阵元为

$$\begin{aligned}
M_{1,1}&=\frac{1}{\Delta\vartheta^2}-\frac{p_1}{2\Delta\vartheta r_1}+\frac{q_1}{r_1},\\
M_{j,j}&=\frac{2}{\Delta\vartheta^2}+\frac{q_j}{r_j},\ (j=2,3,\ldots,N)\\
M_{j,j+1}&=\frac{-1}{\Delta\vartheta^2}+\frac{p_j}{2\Delta\vartheta r_j},\ (j=1,2,\ldots,N-1)\\
M_{j,j-1}&=\frac{-1}{\Delta\vartheta^2}-\frac{p_j}{2\Delta\vartheta r_j},\ (j=2,3,\ldots,N),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

求得标准矩阵本征值问题(3.26)后，我们就可以通过$\bar{\omega}=\pm\sqrt{\lambda}$ $(\bar{\omega}=\omega/\omega_A)$得到原MHD问题的本征值及相应的模结构。

对于$s=0.4$，$\alpha=0.8$，图3.1-图3.3分别显示了本文的矩阵法、标准打靶法和初值模拟法$(\omega^2\to-\partial_t^2)$给出的局域理想气球模的增长率和模结构，可以看到它们基本一致，增长率均$\gamma=0.342$附近。误差只在第三位有效数字，这与网格收敛性有关。这便验证了本文矩阵法的可靠性。

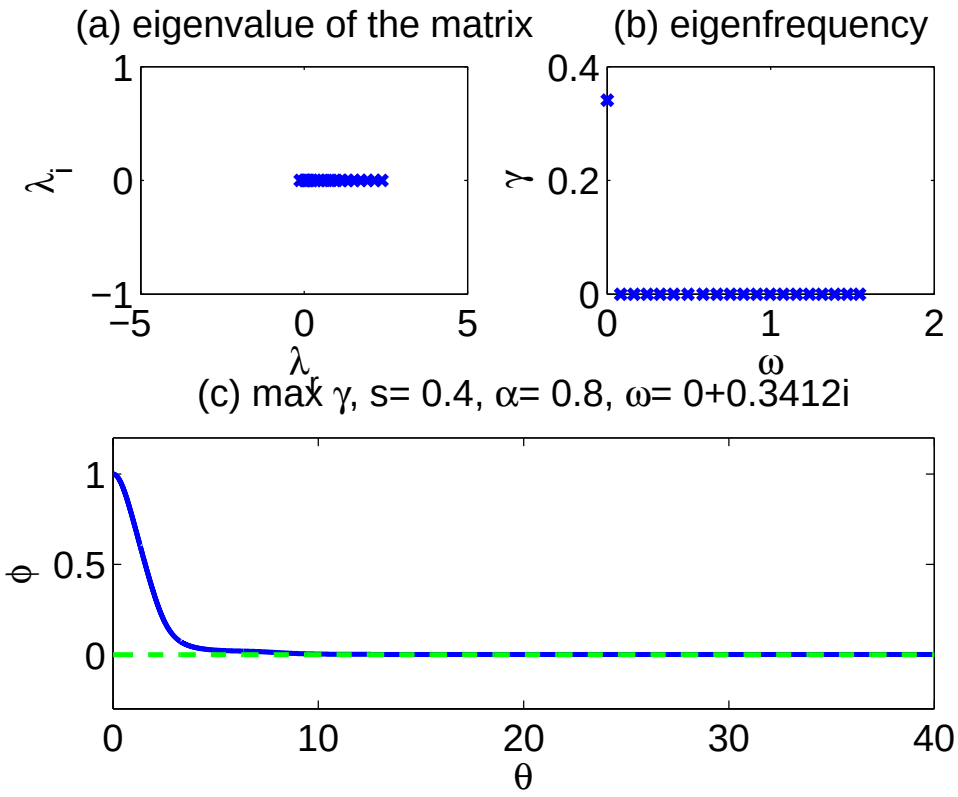

图 **3.1**　本征矩阵法解局域理想气球模方程(**4.4**)，增长率$\gamma = 0.341$。

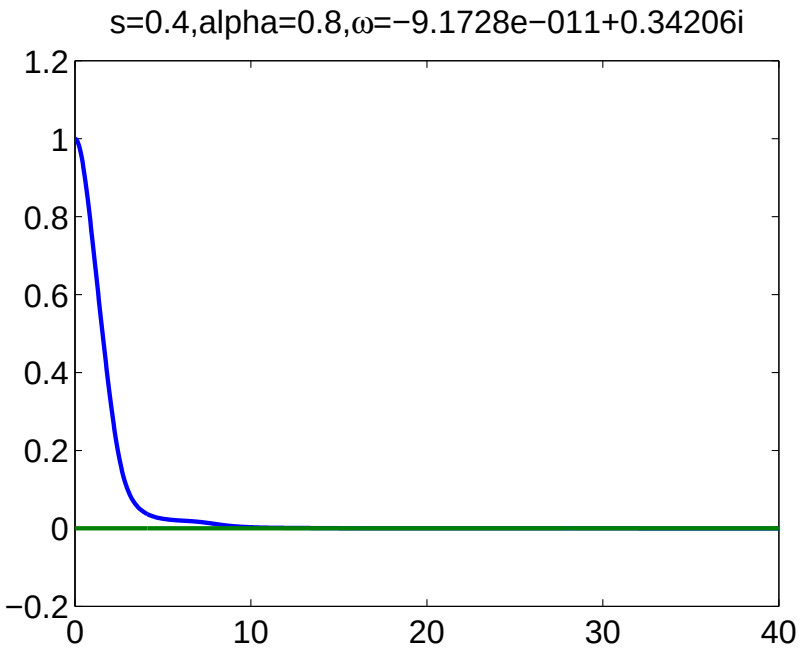

图 **3.2**　标准打靶法解局域理想气球模方程(**4.4**)，增长率$\gamma = 0.342$。

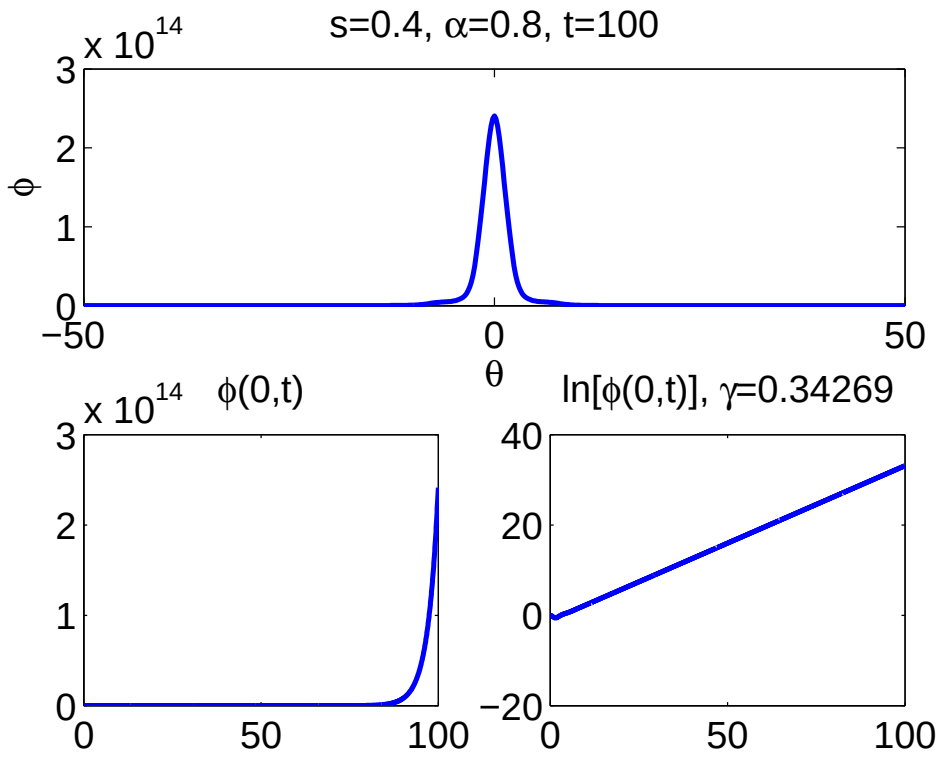

图 3.3　初值法解局域理想气球模方程(4.4)，增长率$\gamma = 0.342$。

等离子问题中通常是更复杂的非线性本征值问题，矩阵$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\lambda)$和$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\lambda)$，即，本征矩阵本身与本征值$\lambda$有关。普适的非线性本征值问题，依然是难于求解的。然而有些形式的非线性矩阵本征值问题却可以通过变换，得到一个等价的线性矩阵本征值问题。这里我们介绍多项式矩阵的普适处理方法，它可以处理等离子体中几乎所有流体模型(或者能退化为流体模型的动理学问题)的本征值问题。

以后文要遇到的ITG本征方程(6.2)为例，它可以很容易的转换(附录B)为如下本征值问题

$$(\boldsymbol{M}_0 + \omega \boldsymbol{M}_1 + \omega^2 \boldsymbol{M}_2 + \omega^3 \boldsymbol{M}_3) \cdot \boldsymbol{X} = 0, \tag{3.27}$$

它可以通过如下变换

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 \Rightarrow \begin{cases} \omega \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2 \\ \omega \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_3 \\ \omega \boldsymbol{M}_3 \boldsymbol{X}_3 = -\boldsymbol{M}_2 \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{X}_1, \end{cases} \tag{3.28}$$

进而得到等价的线性矩阵本征值问题

$$\omega \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}_0 & -\boldsymbol{M}_1 & -\boldsymbol{M}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

以上方法，在数学上对应于所谓的伴侣矩阵(companion matrix)，对于更高阶多项式，方法是一样的，具有普适性。实际中，主要困难只在于矩阵的维数过大时可能导致内存不够或者计算时间过长。非稀疏矩阵，内存要求为$O(N^2)$，计算时间一般为$O(N^\alpha)$，其中$2 < \alpha < 3$。假设上面的矩阵$\boldsymbol{M}$的维度是$N \times N$，当$\boldsymbol{M}$是稀疏的的时候，一般的个人电脑，计算维度$N = 10^6$是可承受的，而$\boldsymbol{M}$非稀疏时，$N = 5000$也通常问题不大，内存约2GB，计算时间约1小时。如果$N < 1000$，一般可在一分钟内给出所有本征值。这在本论文中足够了。

对于含积分的动理学本征值问题，使用类似的普适处理方法也是可能的，一般需要作近似化成类似流体问题的方程，本质上(gyro)-Landau-fluid模型[105;106]也属于此类，最关键的一步依然是找到化成标准矩阵的数学变换。一个通过变换法成功处理动理学色散关系的例子见文献[107]。这种矩阵方法处理流体色散关系[108]更显示出比传统迭代法明显的优势。

4 托卡马克磁流体本征模

托卡马克边界主要的磁流体不稳定性是压强梯度驱动的气球(ballooning)模及电流驱动的剥离(peeling)模。本章我们梳理理想磁流体方程在托卡马克位形中的线性物理，尤其使用约化的磁流体方程(Reduced MHD)[109;110]推导在带位移的圆截面位形下精确到二阶的本征方程，并发展对应的全局本征值代码。本章重点讨论理想磁流体气球模。

4.1 托卡马克位形

首先，我们讨论托卡马克的几何位形并引入磁面坐标。

我们考虑低$\beta(\sim \epsilon^2)$的平衡模型，其中$\epsilon = r/R_0 \ll 1$是逆环径比(aspect ratio)。在圆导体壁边界条件下，最低阶平衡磁面为同心圆；到二阶$O(\epsilon^2)$，磁面为带位移的圆。磁面可以用通常的大柱坐标(R, ϕ_c, Z)定义，其方程为：

$$R = R_0 + r_s \cos\theta_s - \Delta(r_s), \tag{4.1a}$$

$$\phi_c = -\zeta_s, \tag{4.1b}$$

$$Z = r_s \sin\theta_s, \tag{4.1c}$$

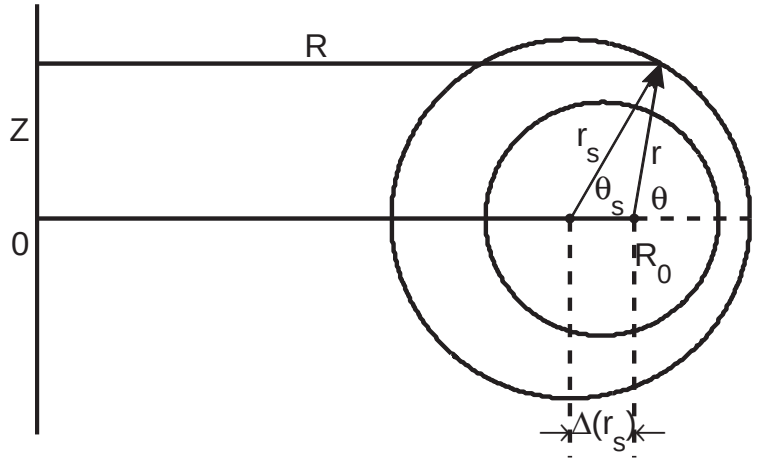

图 4.1 带位移的圆磁面平衡。

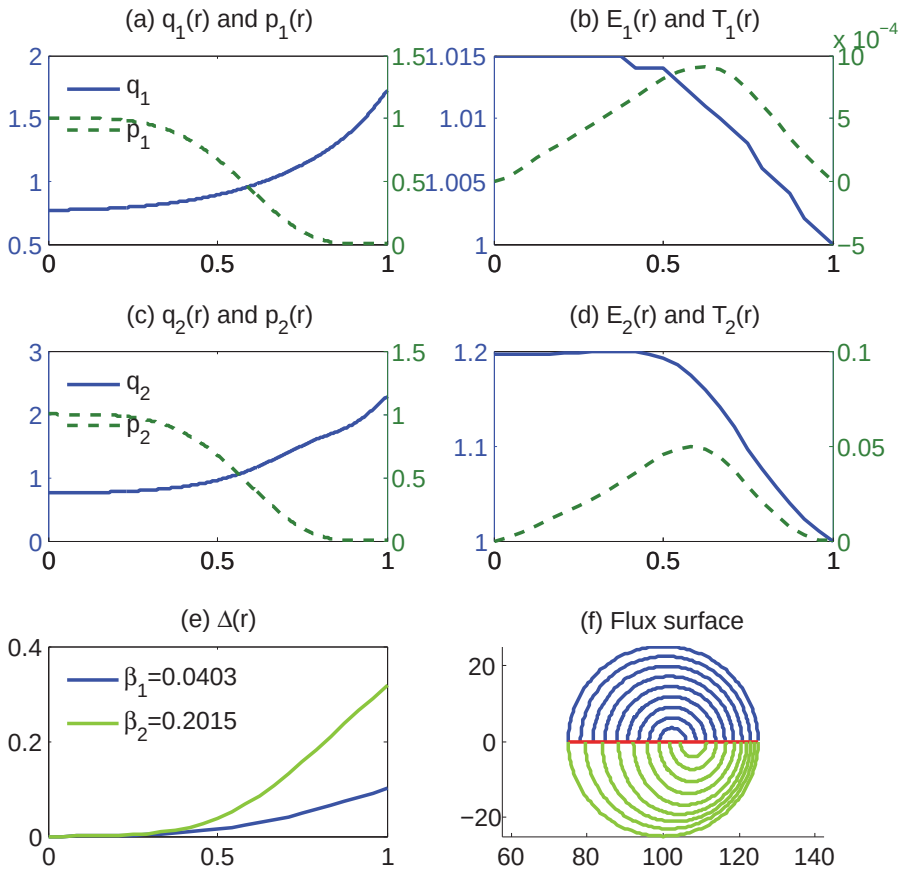

图 4.2 q和p **(用轴上值归一化) 剖面(a)** $\beta_1 = 0.0403$ **及(c)** $\beta_2 = 0.2015$**。(b) 和(d) 显示相应的拉长度(elongation)** E**和三角形变(triangularity)** T**。(e) 显示相应的Shafranov位移。(f) 为磁面等高图。**

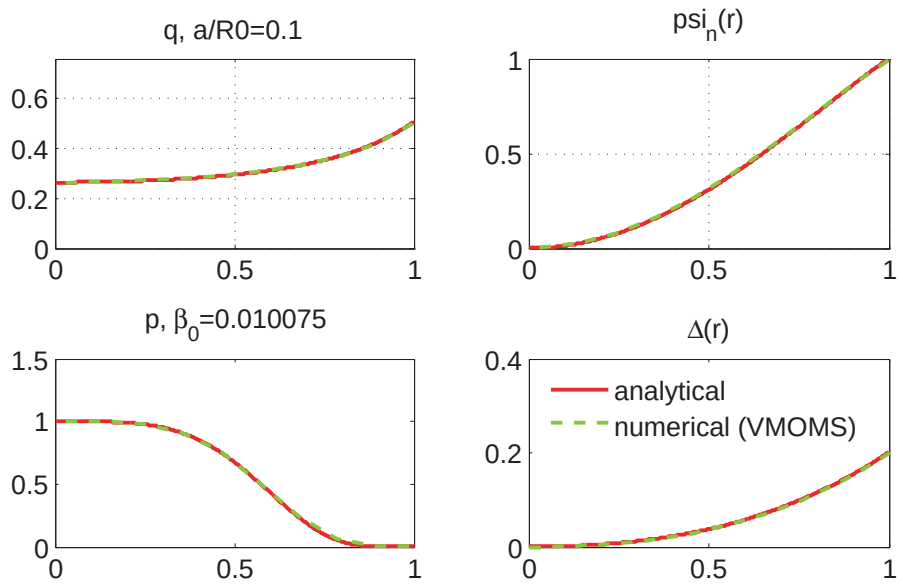

图 4.3 Shafranov位移的解析解与数值解对比。

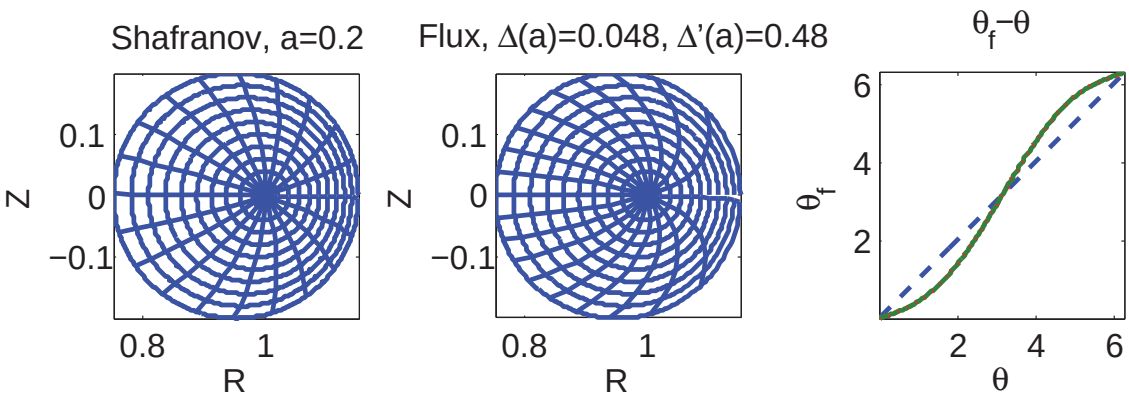

图 4.4　Shafranov坐标与磁面坐标。

其中R_0是大半径，取Shafranov位移$\Delta(0) = 0$ (注意：有些作者使用$\Delta|_{r_s=a} = 0$，但真正起作用的是Shafranov位移对径向变量的导数$\Delta'(r)$，其中a是小半径)。Boozer磁面坐标(r_f, θ_f, ζ_f)与几何坐标(r_s, θ_s, ζ_s)的关系是$r = r_s$，$\zeta_f = \zeta_s$及$\theta_f = \theta_s - (\epsilon + \Delta')\sin\theta_s$[111]，同时[103]

$$\Delta(r) = \int_0^r \frac{q^2 dr}{r^3 R_0} \int_0^r \left[\frac{r^2}{q^2} - 2\frac{R_0^2}{B_0^2} rp'\right] r dr, \tag{4.2}$$

其中q是安全因子，B_0是轴心磁场强度，p为归一化压强。

以上二阶平衡的正确性，在文献中很少给出详细的验证过程，我们这里给出Grad-Shafranov平衡方程无近似情况下的数值解(由VMOMS代码[112]计算所得)的结果，以验证这里半解析平衡确实可用。图4.2中$\epsilon = a/R = 0.25$。对于低$\beta \sim \epsilon^2$ ($\beta_1 = 0.0403$)，拉长度$E \simeq 1 + 10^{-2}$和三角形变$T \simeq 10^{-4}$均非常小，确实可忽略。这显示带位移的圆磁面平衡对低β确实是充分的。不过，对于高β ($\beta_2 = 0.2015$)，拉长度$E \simeq 1.2$和三角形变$T \simeq 0.1$均非常明显，这里的近似平衡模型误差较大。这里拉长度E为椭圆形变的纵横比，如果接近1，则拉长度很小，磁面近似为圆。三角形变为对称中心偏离椭圆中心的量度[112]，其值接近0则表示三角形变很小。

同时需要验证的是方程(4.2)。图4.3给出了位移的解析解与数值解的对比，两者确实可以符合较好，对应的曲线几乎重合。这表明，在$\epsilon \ll 1$和$\beta \ll 1$时，以上半解析平衡确实能够正确计算平衡磁面位移。

最后，几何角和磁面角的差别显示在图4.4中，它们相差$O(\epsilon)$。左图为Shafranov坐标，中间为磁面坐标，右图为θ_f与θ_s的关系。关于本文(尤其第8章)用到的磁面坐标的各种细节见附录A。

4.2 $s-\alpha$一维局域模型下的气球模

用气球模表象可得到一维气球模方程[103]

$$\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\frac{(\nabla\beta)^2}{B^2\mathcal{J}}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\Big]+2p'\kappa_W\phi+\rho\omega^2\frac{(\nabla\beta)^2}{B^2}\phi=0, \tag{4.3}$$

其中$\beta=\varphi-q(\theta-r\sin\theta-\Delta'\sin\theta)$。将方程(4.3)保留到最主要阶[113]

$$\frac{d}{d\theta}[1+h^2(\theta)]\frac{d\phi}{d\theta}+g(\theta)\phi+\frac{\omega^2}{\omega_A^2}[1+h^2(\theta)]\phi=0, \tag{4.4}$$

其中$h(\theta)=s\theta-\alpha\sin\theta$和$g(\theta)=\alpha[\cos\theta+h(\theta)\sin\theta]$，同时$\theta\in(-\infty,\infty)$。以上方程中，气球模的本征解(增长率和气球角坐标$\vartheta$中的模结构)只由磁剪切$s=(r/q)(dq/dr)$和另一个参数$\alpha=-R_0q^2d\beta/dr$决定，因此该模型也称$s$-$\alpha$模型。

方程(4.4)有广为人知，有意思的物理推论：固定剪切s，当α很小时，气球模是稳定的(第一稳定区)；当压强梯度参数α增大时，气球模会先越来越不稳定；但α继续增加，气球模反而会变回稳定，进入所谓的第二稳定区。对于这个方程，我们只指出一点：第二稳定区的出现，关键在于Shafranov位移改变的磁场曲率，从而致稳。细节见接下来的分析(图4.5)。

曲率项$h(\theta)$中的参数α来自Shafranov位移Δ而非来自压强梯度。所以在同心圆几何位形($\Delta=0$)中，h应该改为$s\theta$。或者在更精确的平衡模型中$h(\theta)$还需要进一步改变。

另外，传统上解方程(4.4)的数值解法是打靶法(shooting method)，由于打靶法本质上属于迭代算法，非常依赖初值，而且收敛性也不佳，我们统一改用3.2节给出的矩阵法。另外初值法($\omega^2\to-\partial_t^2$)求解方程(4.4)也是可行的，但也不如矩阵法便捷。经过验证，以上三种方法在网格足够密从而收敛时结果一致(3.2节)。

图4.5显示在同心圆几何位形($\Delta=0$)中第二稳定区将消失。这个结果也表明使用局域模型定量研究气球模不稳定性，$\Delta(r)$应该尽量精确；或者从另一方面说，简化的模型对气球模的不稳定性只能算是粗略的估计。

4.3 全局磁流体本征方程

4.3.1 模型及公式

我们从理想磁流体涡度(vorticity)方程[114–118]出发

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\Big[\frac{\omega^2}{v_A^2(r,\theta)}\nabla_\perp U\Big]+\boldsymbol{B}\cdot\nabla\Big(\frac{1}{B^2}\nabla\cdot B^2\nabla_\perp Q\Big)-\\ \nabla\Big(\frac{J_\parallel}{B}\Big)\cdot(\nabla Q\times\boldsymbol{B})+2\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot(\boldsymbol{B}\times\nabla\delta P)}{B^2}=0,\end{aligned} \tag{4.5}$$

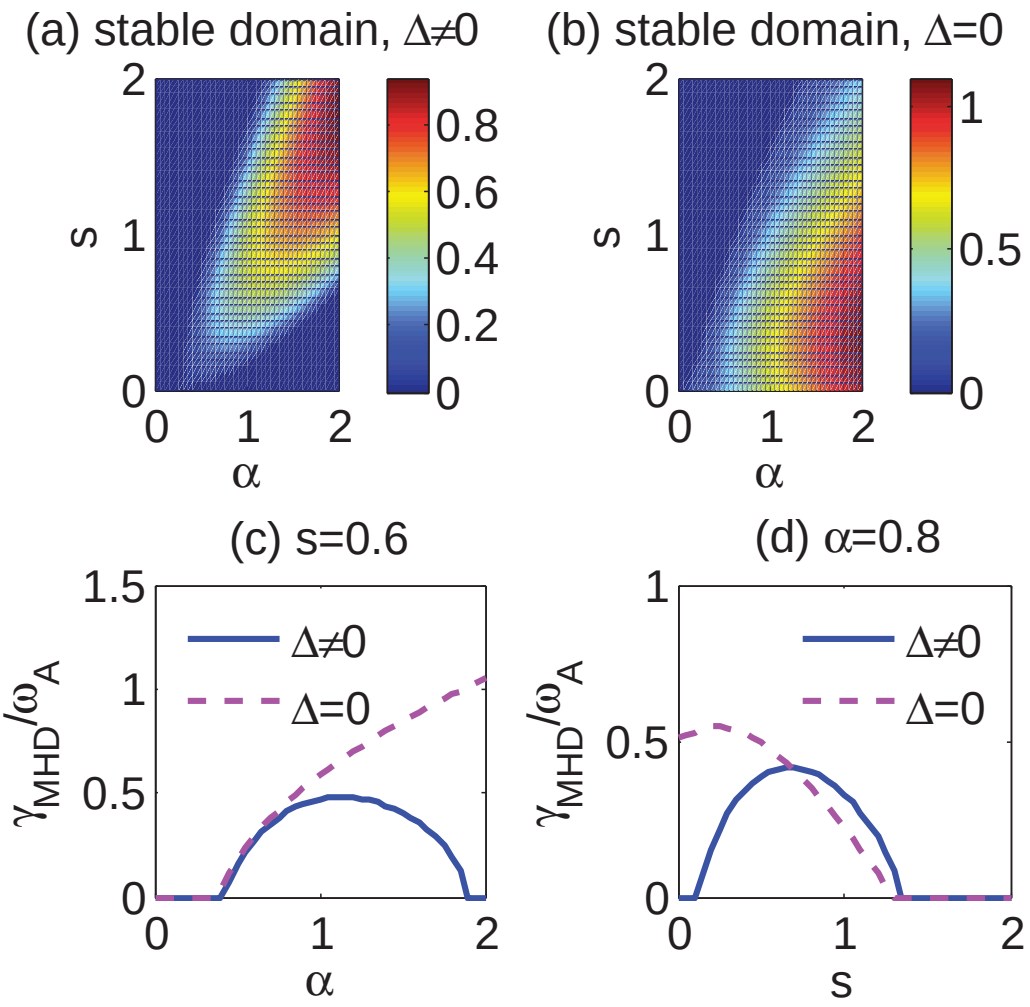

图 4.5 数值求解局域气球模方程显示Shafranov位移有显著影响。

其中流函数(stream function)U通过等离子体位移矢量定义$\boldsymbol{\xi} = (\nabla U \times \boldsymbol{b})/B$，$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{b} = (\nabla \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b}$是磁场曲率，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}/B$是单位平衡磁场，$J_{\|} = (c/4\pi)\boldsymbol{b} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B}$是平行平衡电流，$Q = (\boldsymbol{b} \cdot \nabla U)/B$，及$\delta P = (\boldsymbol{b} \times \nabla U \cdot \nabla P)/B + (\Gamma P \nabla U \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{\kappa})/B$，其中取$\Gamma P = P_e + 7P_i/4$使得可正确的处理测地压缩性(geodesic compressibility)[117;119]。方程(4.5)在小环径比($\epsilon = r/R_0 \ll 1$)的托卡马克等离子体中精确到二阶，其中我们假定了低$\beta \sim O(\epsilon^2)$。方程(4.5)中第一项为惯性(inertial)项, 第二项是场线弯曲(field line bending)项，第三项是扭曲(kink)项，及最后一项是气球(ballooning)项。因此在方程(4.5)中各个物理项得到了很好的分离，从而比原始的磁流体方程(比如在NOVA[120] 和GTAW[121]中用的方程)更便于研究物理。另外注意由于静电势$\delta\phi$通过$\delta\phi = \partial U/\partial t$与$U$相关，因此$U$和$\delta\phi$的模结构可以看作相似的。

与文献[114;116;117]类似，我们考虑带位移的圆截面磁面平衡位形。我们假设$U =$

$\sum U_m(r)\exp(in\zeta - im\theta)$，同时展开方程(4.5)到$O(\epsilon^2)$，得到如下的耦合方程

$$L_{m,m-1}U_{m-1} + L_{m,m}U_m + L_{m,m+1}U_{m+1} = 0, \tag{4.6}$$

其中算符$L_{m,m}$和$L_{m,m\pm1}$定义为

$$\begin{aligned} L_{m,m} = \frac{\partial}{\partial r}\Big[\frac{(1+4\epsilon\Delta')}{v_A^2}\bar{\omega}^2 - k_m^2 - c_s^2\Big]r\frac{\partial}{\partial r} + (k_m^2)' - \\ \frac{m^2}{r}\Big\{\frac{[1-4\epsilon(\epsilon+\Delta')]}{v_A^2}\bar{\omega}^2 - k_m^2 - c_s^2 - \bar{\kappa}_r\alpha/q^2\Big\}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} L_{m,m\pm1} = \bar{\omega}^2\Big\{\frac{\partial}{\partial r}\frac{(2\epsilon+\Delta')}{v_A^2}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(\epsilon-\Delta')}{v_A^2}\frac{m(m\pm1)}{r} \\ \mp\frac{[\epsilon+(r\Delta')']}{v_A^2}m\frac{\partial}{\partial r}\Big\} - \Big\{\frac{\partial}{\partial r}r\Delta' k_m k_{m\pm1}\frac{\partial}{\partial r} - \\ \frac{m^2}{r}(\epsilon+\Delta')k_m k_{m\pm1} \mp m[\epsilon+(r\Delta')']k_m k_{m\pm1}\frac{\partial}{\partial r}\Big\} \\ -\frac{m\alpha}{2q^2}\Big(\frac{m}{r} \mp \frac{\partial}{\partial r}\Big). \end{aligned} \tag{4.8}$$

这里，$\bar{\omega} = \omega/\omega_A$，$\omega_A = V_A/R_0$，$k_m = n - m/q$，$V_A = v_A(0)$ 是轴心阿尔芬(Alfvén)速度，$\alpha = -R_0q^2d\beta/dr$是归一化压力梯度，$\bar{\kappa}_r = \epsilon(1/2 - 1/q^2) + (r\Delta')'/2 + \Delta'$是平均径向曲率分量。归一化的离子声速$c_s^2 = [2/(V_A^2R_0^2)][T_e + (7/4)T_i]/m_i$代表测地声耦合，可以从动理学理论中计算得到[117;119]。

以上方程的推导基于文献[114;116–118;122]，但保留了理想磁流体方程精确的自伴性(self-adjointness)，并且不限于高环向和极向模数。细节对比这里的方程和其他文献中的方程，及自伴性的证明参考文献Xie&Xiao (2015)[123]。这组方程包含非常广的本征模，如各种阿尔芬本征模(全局GAE, 环TAE, 反剪切RSAE等)，以及内扭曲(kink)模和理想气球模(IBM)。

方程(4.6)-(4.8)可以数值上求得连续谱和本征模。连续谱通过使得二阶导数系数矩阵的行列式为零而得到[124]。本征模通过求解矩阵本征值问题$\boldsymbol{AX} = \lambda\boldsymbol{BX}$得到，其中$\lambda = \omega^2$。我们使用中心差分离散方程(4.6)，$df/dr = (f_{j+1} - f_{j-1})/(2\Delta r)$及$d^2f/dr^2 = (f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})/\Delta r^2$。计算中使用零边界条件。本征矩阵维数为$(N_m \times N_r)^2$，其中$N_r$是径向网格数，及$N_m = m_{\max} - m_{\min} + 1$是极向傅里叶$m$模所保留的数目，计算中取$m \in [m_{\min}, m_{\max}]$。

基于以上算法，我们发展了一个新的全局本征代码AMC(Alfvén Mode Code)。为了加快计算速度，用了稀疏矩阵计算本征值(模频率)和本征矢(模结构)。相较于其他代码(通常使用迭代root finding寻根法)，如NOVA[120], KAEC[125]和GTAW[121]，这个新代码更容易使用并且计算更快。比如使用$N_r = 512$和$N_m = 10$进行运算一个典型例子，AMC可以几秒或

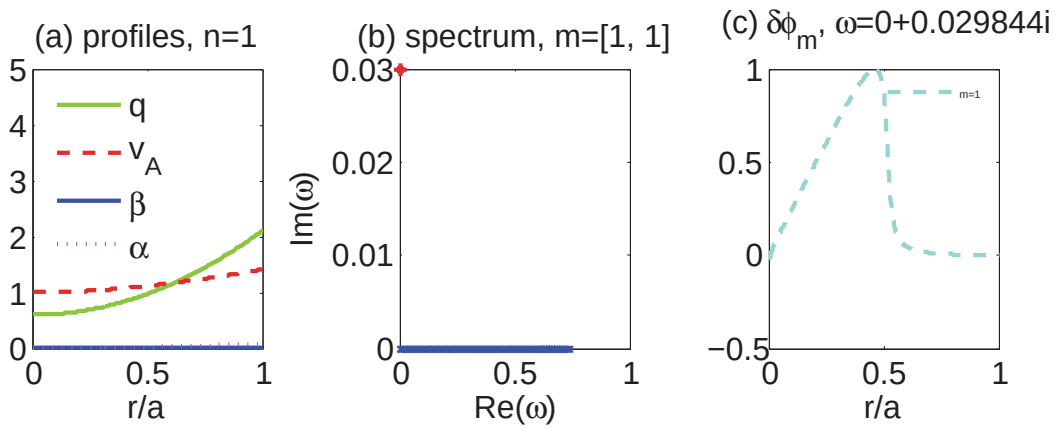

图 4.6　AMC计算柱位形下的内扭曲模示例。

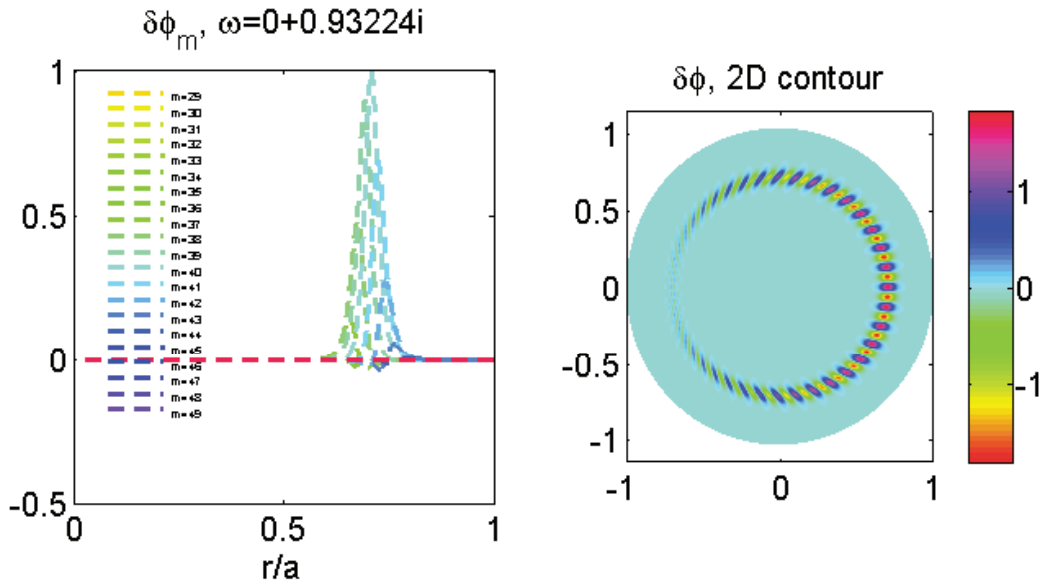

图 4.7　AMC计算理想气球模示例。

者不到一秒找到本征模，而NOVA和KAEC通常需要几分钟。更进一步，AMC能够在几分钟内找到所有N_d ($N_d = N_r \times N_m$)个本征值和本征模，并且不会丢根。AMC测试的模数范围到$n = 100$依然无数值困难，NOVA、KAEC和GTAW等在高模数$n > 20$通常无法获得好的计算结果。这里如果是求完整的本征方程，它既包含连续谱也包含物理上的本征模。对于连续谱的根，模结构通常在某一径向位置奇异，而离散谱的模结构通常是全局的同时是光滑的，从而也是我们最感兴趣的。对AMC代码的测试见文献[123]。

4.3.2　磁流体不稳定性

方程(4.5)第二项与第一项联合可得到稳定的阿尔芬本征模，具体可参考文献[123]，这里不细讨论。本论文关心磁流体中的不稳定性，在方程(4.5)中有两个来源，一个是第三项

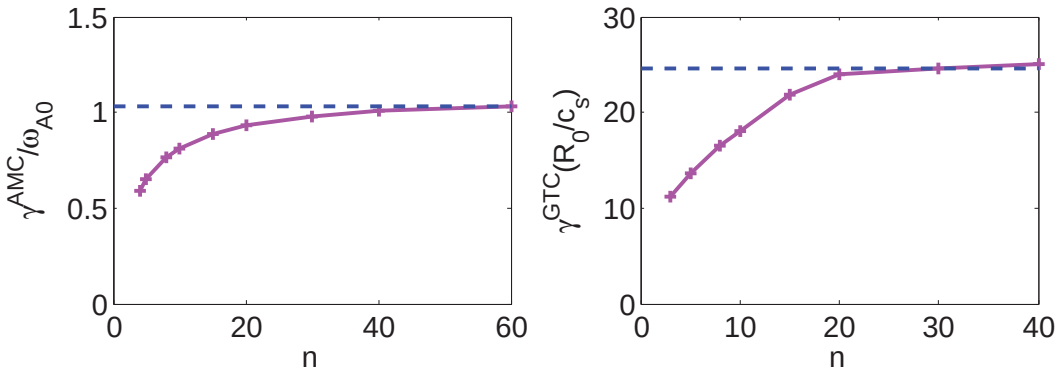

图 4.8　AMC和GTC计算的理想气球模增长率随环向模数n增大而趋于常数。

表 4.1　局域s-α模型、GTC及AMC计算的IBM增长率和模位置

	s-α ($n \to \infty$)	GTC ($n = 30$)	AMC-reduced ($n = 30$)
γ	6.51	6.8	5.75
r/a position	0.62	0.60	0.63

电流驱动的扭曲模，一种是第四项压强驱动的气球模。

内扭曲模，主要由平行平衡电流驱动的不稳定性。图4.6显示了AMC中典型的柱位形的内扭曲模算例，由于$q = 1$面的存在，该模不稳定。图中可看到，理想内扭曲模，是纯增长的。

气球模主要由压强梯度驱动，一个示例见图4.7。4.4节将具体讨论这支模。

4.4　理想气球模

4.4.1　不考虑位移

这一节，我们对比GTC初值模拟和全局AMC本征解以及一维局域s-α模型中的理想气球模。首先，我们知道，根据局域模型的预测，理想气球模在$n \to \infty$时，增长率γ是相同的，误差$O(1/n)$，因此，在全局计算中也应看到这一随n增加γ趋平的变化趋势。图4.8显示的是未考虑Shafranov位移时，AMC和GTC计算的理想气球模增长率随n增加的变化，确实均趋于常数，定性与局域理论一致。值得注意的是，GTC的模拟中，需要非常密的网格，结果才能收敛，对于$n = 30$，图中的结果对应的网格为$N_r \times N_\theta \times N_\zeta = 200 \times 3086 \times 64$，时间步长也需要足够短。

接下来我们定量对比不考虑位移时三种模型计算的增长率和径向模局域位置，对

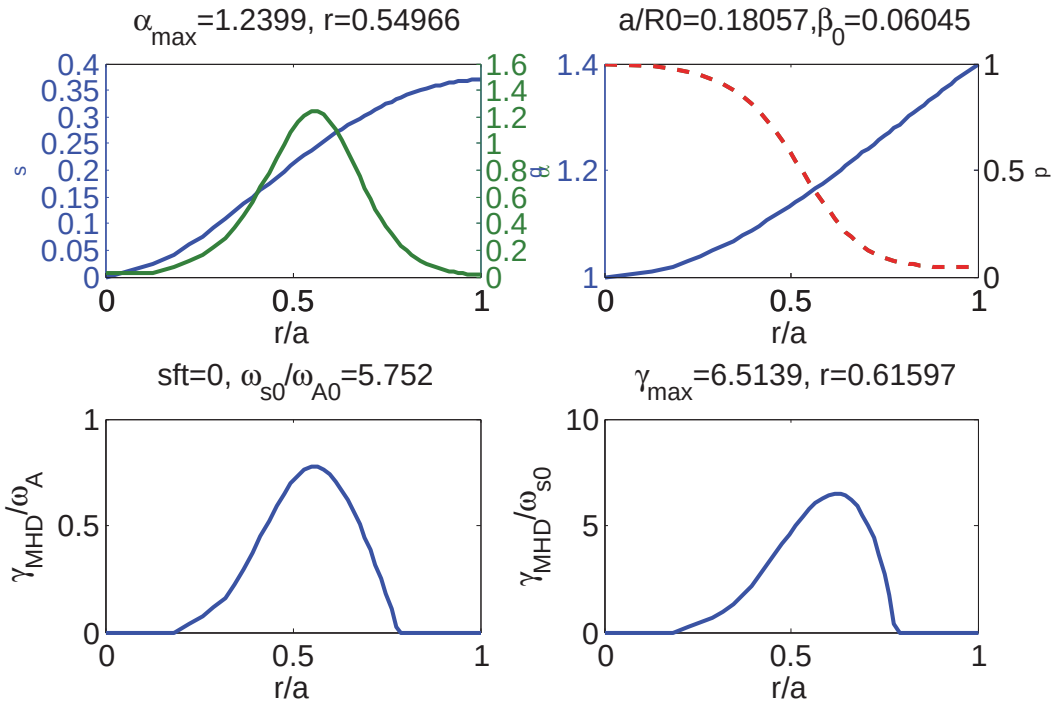

图 **4.9**　局域s-α模型扫描径向剖面预测全局理想气球模增长率和模位置。

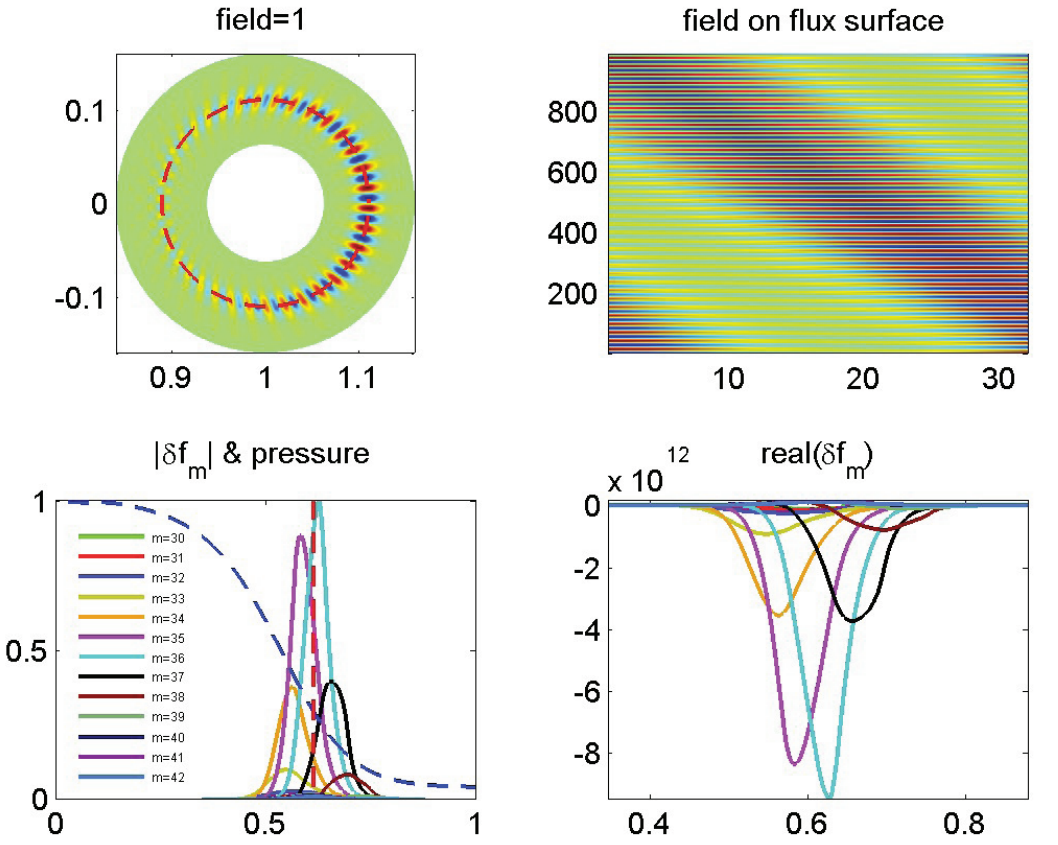

图 **4.10**　GTC全局理想气球模模拟结果，$n = 30$，电势扰动$\delta\phi$。

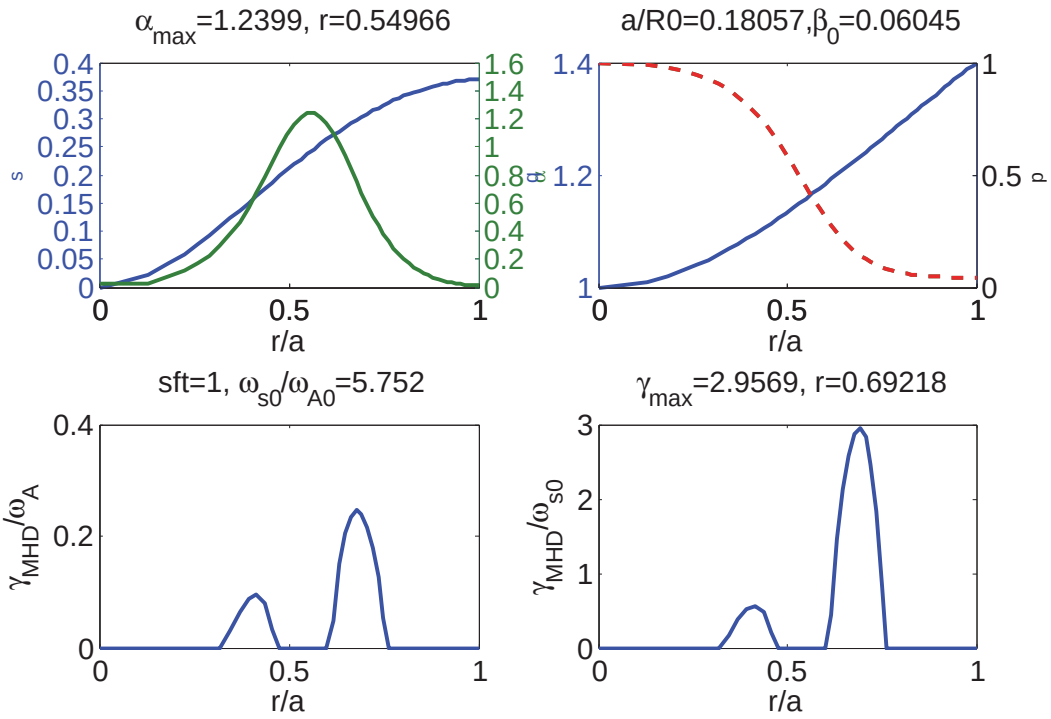

图 4.11　局域s-α模型扫描径向剖面，包含平衡位移，理想气球模可以进入局域第二稳定区，但全局依然不稳定。

比结果显示在表4.1中，可见三种模型的结果基本吻合。这验证了GTC和AMC的正确性，也表明局域模型可以用来计算IBM。其中，AMC的模型中作了简化，只保留了最低阶的压强项，即方程(4.7)中与α相关的一项。这里对AMC和GTC，全局安全因子q和压强p剖面是直接给定的；而在局域模型中，则是分别计算径向每一点的s和α和用于归一化的局域频率ω_A，再代入局域方程计算每一点的增长率，取增长率最大的一点的径向位置和增长率与全局结果对比。全局剖面：$q = 1.0 + 0.5(\psi/\psi_w) - 0.1(\psi/\psi_w)^2$，密度$\rho = 1.0 + 0.48\{\tanh[(0.3 - (\psi/\psi_w))/0.2] - 1.0\}$。温度取常数。图4.9和图4.10分别显示的是局域模型的本征值和GTC初值模拟的结果。

4.4.2　考虑位移

我们进一步感兴趣的是，含Shafranov位移圆平衡位形时，在该理想磁流体模型下全局线性模拟进入第二稳定区是否可能？我们的回答是：不能。因为，假设局域模型是正确的，那么全局径向位置，必然有某一点A(比如轴上$r = 0$处)在第一稳定区，而在某一点B(如梯度最大处)在第二稳定区，而$s(r)$和$\alpha(r)$随r是连续变化的，把A和B两点标注在图4.5(a)的s-α图中，A和B的任何方式的连线均必然穿过不稳定区，也即在全局模型中径向位置A和B之间必然有不稳定点，从而尽管局域B点进入了第二稳定区，但全局依然是不稳

定的。图4.11与图4.9使用完全相同的参数，但是包含了平衡位移，可以看到确实存在第二稳定点，但全局依然是不稳定的[1]。

本章梳理了理想磁流体方程中的本征模，尤其研究边界中很重要的气球模不稳定性。这里重新推导的模型方程及发展的算法和AMC代码，具有实用价值，对于阿尔芬本征模部分，已经成功的应用于国内的实验装置HL-2A[126;127]和J-TEXT。全局理想气球模和局域s-α模型的对比研究有助于对理想气球模的深入理解，尤其有助于理解第8章动理学气球模的平衡敏感性。另外，代码校验部分使得我们对本论文涉及的GTC 流体模型可靠性有更多把握。

[1]注意，这里并未排除其他非圆位形全局进入第二稳定区的可能。

5 HL-2A边界静电微观不稳定性

本章到第7章是本论文的核心部分，也是新物理最丰富的部分，对于H模的边界线性和非线性物理可能都提供了全新的研究角度。

磁约束聚变(托卡马克或仿星器)物理研究的一个主要目的是提高能量约束水平从而使得聚变更可行。比L模约束性能成倍改善的H模已经在各种装置上陆续发现，但是其机制依然未完全弄清，大量的理论研究依然在进行中。

随着超级计算机技术的发展，基于第一性原理的回旋动理学代码来模拟H模相关的物理已经在进展中。最近(2012年)文献[12]使用不同的代码，用局域参数进行了DIII-D边界台基区物理的线性电磁回旋动理学分析。尽管各个代码的结果定性相近，但是定量上的增长率能差到甚至50%以上。进一步的研究发现，动理学气球模(KBM)对平衡非常敏感[128](第8章)，即使相同局域平衡，但不同的实现方式，结果也会差较大(第8章)。这使得KBM的模拟以及与实验对比目前依然相当困难。第8章将具体讨论该问题。文献[25;30]使用全局[1]回旋动理学代码GEM 对DIII-D 托卡马克H 模边界台基区通过扫描参数进行了电磁模拟，主要研究的是动理学气球模和剥离模。但是由于缺乏与其他代码、已知理论或实验结果的对比，该文献中的结论还只能算初步的。GTC代码此前也已经被用来研究DIII-D台基区的物理[22]，主要是静电模拟。到目前为止，H模边界微观不稳定性的研究都还只是代码-代码间的对比或者一些定性物理研究，并未定量的与实验对比。

近期HL-2A托卡马克H模实验上看到并测量了共存的各种静电(ES)和电磁(EM)模。本章作为H模微观不稳定性研究的第一步，我们集中研究HL-2A对应的静电线性和非线性物理，以便弄清相应的静电模的类型，同时检验静电回旋动理学代码和模型是否正确。结果显示，模拟和实验在合理范围内确实一致。完整的弄清实验上的微观不稳定性当然需要电磁模拟，但是如前所述，目前电磁模拟还非常困难，因此我们留到以后进一步研究。

[1]注：由于GEM的该项模拟中使用的是拟合参数的平衡，是否确实能完整包含全局效应还值得商榷。

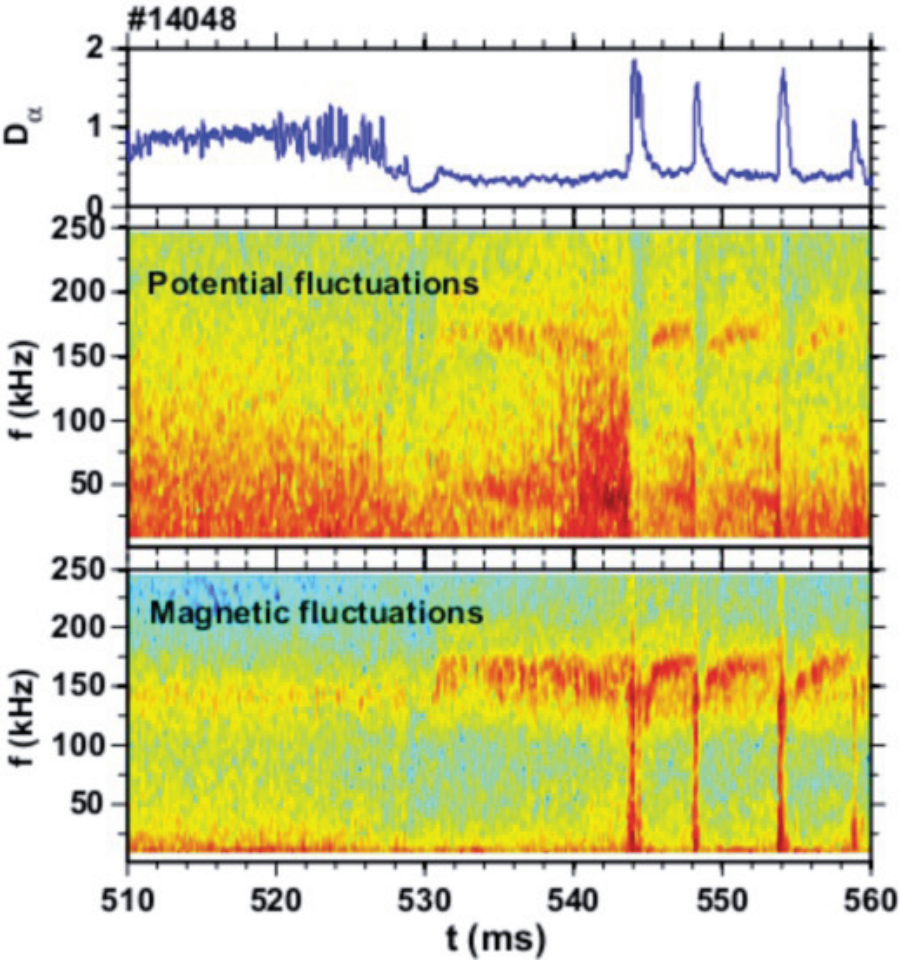

图 5.1　HL-2A #14048炮观察到的电势和磁场扰动信号的谱图。

5.1　HL-2A实验观察和模拟设置

最近HL-2A托卡马克H模实验[2](如以下几炮#19298, 14048, 14052)，低频湍流(LFT)和高频湍流(HFT)均有看到，如图5.1。图中可看到，在低频区(f ~ 20-100 kHz)磁扰动很小，因而LFT主要是静电的，其极向模数测量到为m ~ 14-33。同时，在高频区(f ~ 100-400 kHz)，电势扰动和磁扰动均明显，因而HFT主要是电磁的，相应的极向和环向模数测量为m ~ 16-38，n ~ 6-14。我们这里只模拟LFT，取#19298炮的平衡分布，其实验的频率谱见图5.2，图中可见LFT的峰值在80kHz左右。

HL-2A实验上边界区典型的主要参数见表5.1，典型的台基宽度如#19298炮的台基宽度约3-5cm。由于实验诊断单炮等离子剖面全面的精确数据缺乏，我们从一系列类似实验放电数据中估计近似的剖面，同时参考表5.1中的数据，以下模拟中用的剖面见图5.3。同时我们也注意到模拟中调整剖面参数，使得梯度、磁剪切等变化30%甚至更大，得到

[2]本章实验数据由孔德峰提供。

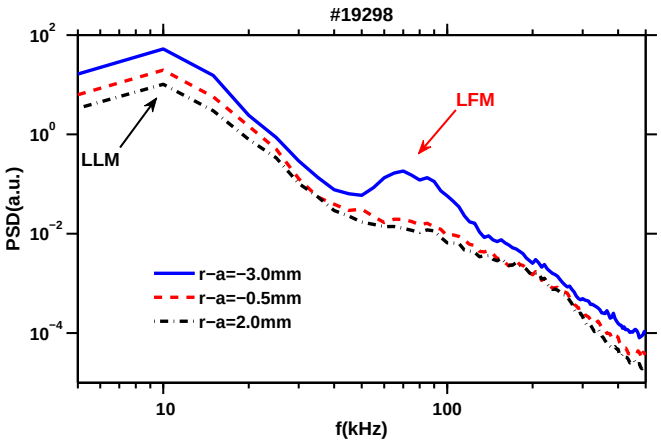

图 5.2　#19298炮不同径向探针位置r-a ~ -3mm,-0.5mm和2.0mm电势扰动的自动关联谱强度(auto-power spectral)图，频率峰值约在80kHz。

表 5.1　HL-2A托卡马克H模实验边界参数

q_{95}	B_0	R_0	a	T_e	n_e
3.0	1.35T	165cm	40cm	10-80 eV	~ 0.4e13 cm^{-3}

的模拟结果差别不大。而实验中每一炮的参数显然也是有差别的，但静电模的实验诊断结果差别也不大。因此剖面测量的不精确性对我们以下的结论并不敏感。模拟中实测带位移的平衡，发现对结果影响不大，所以为了简单，模拟中使用了同心圆磁面平衡。为了降低模拟数值噪声，温度密度本身设成均匀，但它们的梯度在模拟中仍然保留。这种做法能使得粒子模拟中在有限的计算资源下信噪比足够大同时又保留了最重要的物理[80;83]。模拟中离子取氘$m_i = 2m_p = 3672m_e$。默认的时间步长取$\Delta t = t_0 = 0.002t_s$，其中$t_s = R_0/c_s$及$c_s = \sqrt{T_e/m_i}$。

5.2　线性模拟结果

5.2.1　线性频率随环向模数的变化

实验中#19298炮在494ms的边界局域中心测量温度约50eV。不过，为了减少计算资源和降低数值噪声，我们先用1000eV和200eV的电子温度进行模拟。后面我们将验证，模拟结果的频率在用归一化的时间t_s下变化不大。

我们发现如果使用动理学电子模拟，对于不同的环向模数n(对应不同的极向波数$k_\theta = nq/r$)，占主导的模的频率在电子传播方向。而使用绝热电子模拟时，系统中只

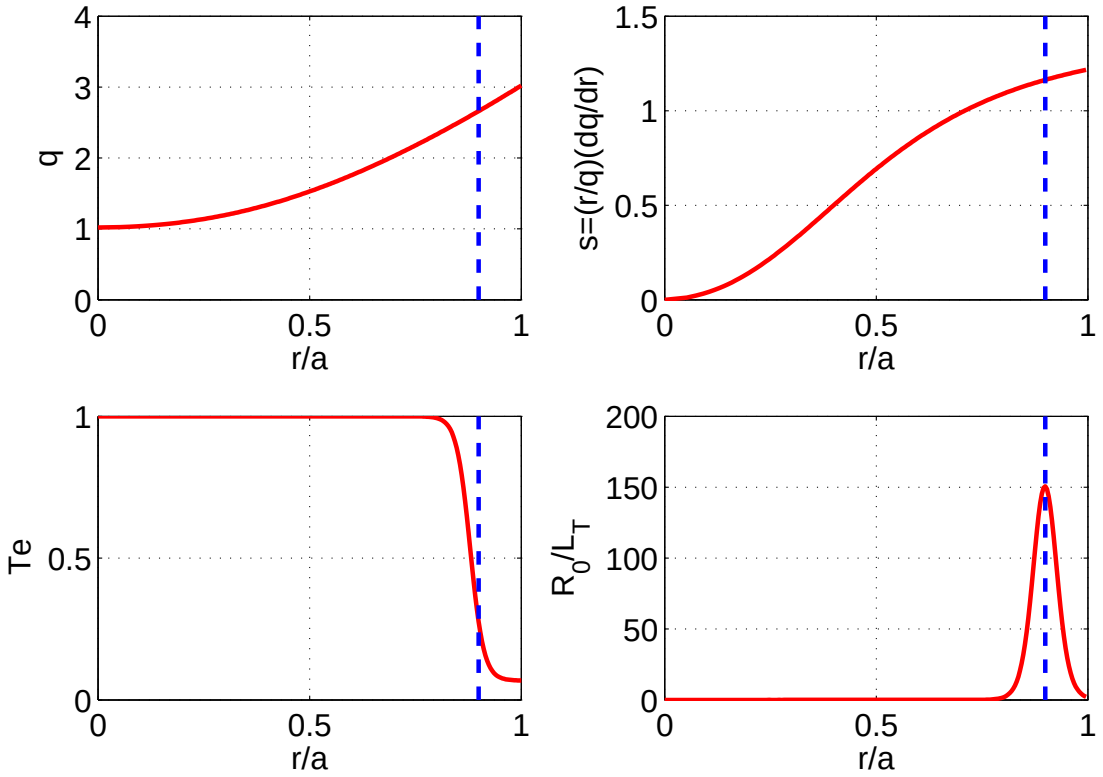

图 **5.3**　模拟中用的等离子剖面，其中$L_f \equiv -d\ln f/dr$。$q(r)$和$T_e(r)$剖面拟合自**#19298**炮**494ms**的实验数据。其他实验剖面数据缺乏。为简单，模拟中我们取$n_e(r)$，$T_i(r)$和$n_i(r)$的剖面与$T_e(r)$的相同。

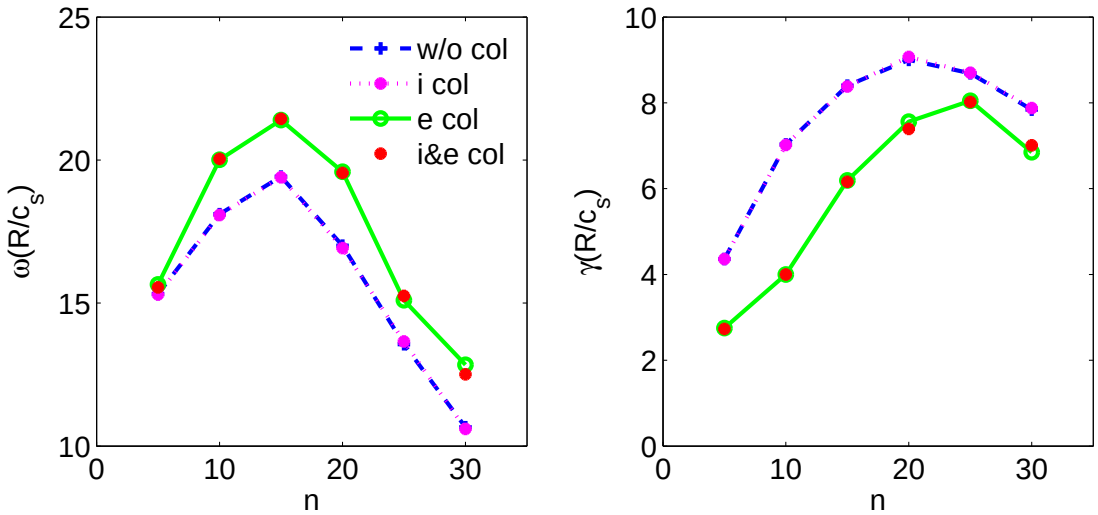

图 **5.4**　线性频率随环向模数n的变化，$T_e = 1keV$。碰撞起阻尼作用。

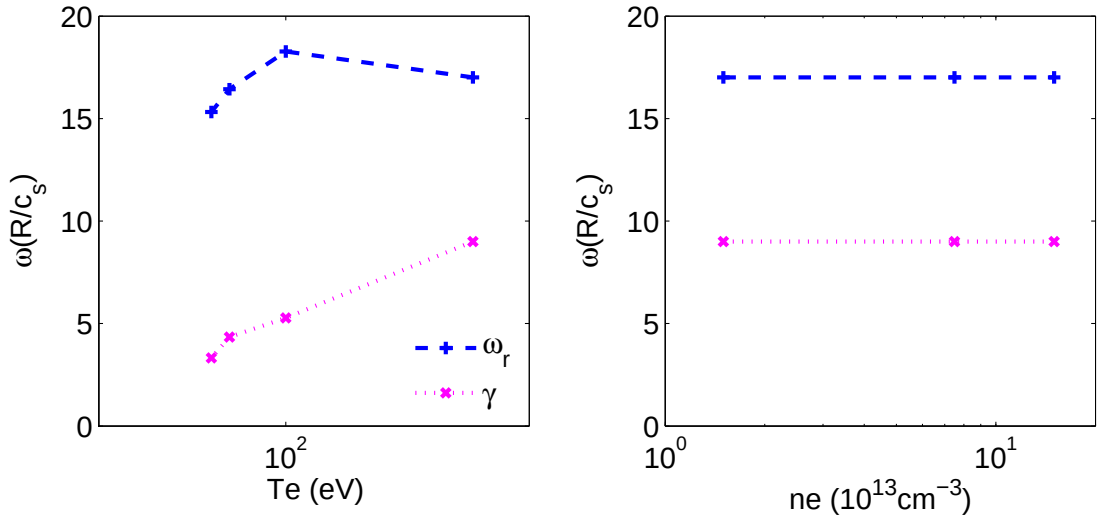

图 5.5 线性频率和增长率随温度和密度的变化，$n = 20$。密度对结果无影响，温度对归一化的频率也影响不大，即，$\omega_r/\omega_s \simeq 15 - 19$。

存在非常弱的不稳定性或者不存在不稳定模。因此，在模拟参数下系统中占主导的应该是捕获电子模(TEM)。线性频率和增长率对n的扫描见图5.4。对应于最不稳定点的环向模数$n \sim 20$。由于边界$q \sim 2.8$，相应的极向模数$m \sim nq \sim 56$。这个值比实验观测到的$m \sim 14 - 33$要大。考虑碰撞时，如图5.4所示，电子碰撞使得模增长率稍微下降，而离子碰撞对结果几乎没影响，有碰撞的不稳定模频率比无碰撞时稍高，但增长率最大值对应的n差不多。这是合理的，因为碰撞频率$\nu_{ei}/\omega_{be} \simeq 1.8 \times 10^{-3}$ 及$\nu_{ii}/\omega_{bi} \simeq 1.4 \times 10^{-3}$ 都很小。所以该系统中占主导的是无碰撞(collisionless) TEM (CTEM)，而非耗散(dissipative) TEM (DTEM)，因为DTEM的碰撞会使得模更不稳定(第2.2节)。如果换用实际边界温度，碰撞频率($\nu_e \propto n_e T_e^{-3/2}$[129]) 随温度降低会升高，但随密度降低而降低，由于边界密度也低，因而实际碰撞频率在外边界处比边界区域中心处不会增加太多。比如温度密度同时降低20倍，碰撞频率只增加$\sqrt{20} \simeq 4.5$倍，按前面ν_{ei}的数据，边界碰撞频率依然较低。

5.2.2 温度密度的线性扫描

为了用线性的结果与实验对比，其频率和模数对应于增长率最大点，即$n \simeq 20$。我们这里验证，这个特征频率在不同的温度和密度下变化不大。如图5.5所示，密度对频率几乎无影响[3]，温度对归一化的频率也影响不大，即，$\omega_r/\omega_s \simeq 15 - 19$，其中$\omega_s = c_s/R_0$和$c_s = \sqrt{T_e/m_i}$。温度$T_e = 50eV$对应的频率为$\omega = 16.4\omega_s$，给出$f = \omega/2\pi + f_{dp} = (78 + f_{dp})kHz$。如果多普勒(Doppler)频率$f_{dp}$不大，这个值与图5.2中的实验值$f \simeq 80kHz$差不多。实验

[3]这是合理的，因为回旋动理学静电模拟中，密度n_0作为归一化参数不出现。

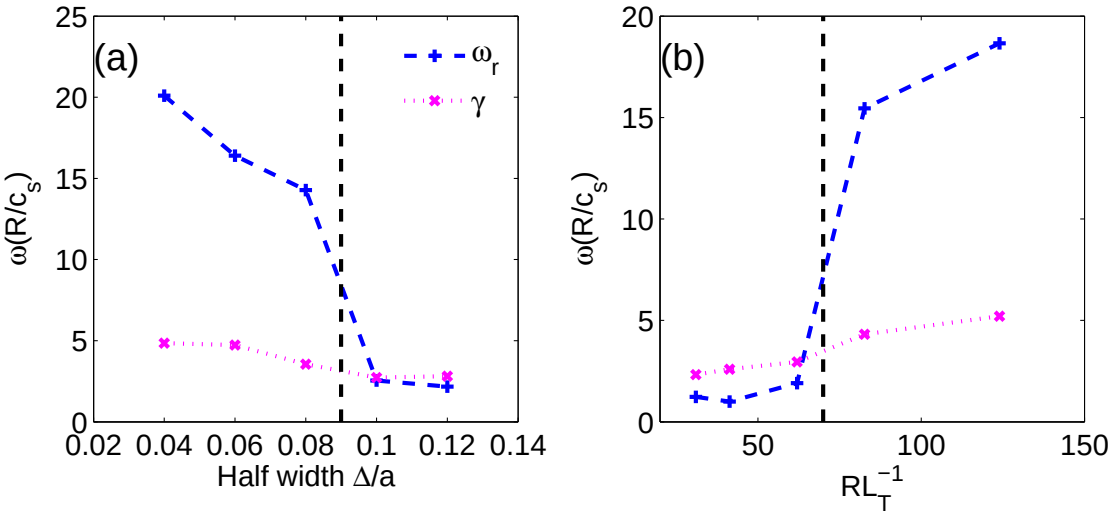

图 5.6　不同温度和密度梯度下的线性结果，$n = 20$及$Te = 200eV$。频率从$\omega > 10\omega_s$到$\omega < 3\omega_s$有一处明显的跳变(a)使用非均匀梯度，台基区归一化半宽度$\Delta/a > 0.08$时，或者(b) 使用展平的梯度$RL_T^{-1} < 80$时。

中HL-2A的多普勒频率目前很难精确得到，如果典型值可以估计为$|f_{dp}| < 10kHz$，模拟频率在实验值附近。不过我们要注意，模拟的频率值与温度关系很大，因为归一化用的ω_s与温度相关。因此要精确与实验对比，需要实验上测量的温度也足够精确。对于#14048和14052炮实验频率较小(30-65 kHz)，我们发现其实验量到的边界温度也较小(10-40eV)，这个特性与模拟结果定性符合。

5.2.3　线性模拟扫描密度和温度梯度

此前Liu等人[74]对HL-2A托卡马克边界L模下的一个静电GTC模拟同样显示TEM占主导，不过其模拟得到的频率$\omega_r \simeq 2\omega_s$相较于这里的$\omega/\omega_s > 10$非常小。如图5.4所示，同时此前模拟的L模下的增长率$\gamma \simeq 2\omega_r$大于实频，远超过临界不稳定性。而这里H模下，$\gamma < 0.5\omega$更接近临界不稳定性。最近Fulton等人[22]对DIII-D的一个GTC模拟结果，也更接近Liu的结果，显示出低频特性。在此前这两个模拟与我们这里的模拟有多处不同，以与Liu结果[74]对比为例：1. 我们的$q \simeq 2.8$相对稍小($q_{Liu} \simeq 3.6$); 2. 我们模拟中的梯度比文献Liu et al. (2010)[74]和Fulton et al. (2014)[22]更大，实际上我们这里的梯度大约是文献Liu et al. (2010)[74]中的四倍；3. 模拟中梯度剖面也不同，展平的拟合局域参数的梯度和原始非均匀的梯度(具体差别参见第8章图8.6)。我们发现造成频率不同的关键因素是峰值梯度，而不是其他因素。图5.6显示不管是用均匀梯度还是非均匀梯度，存在一临界梯度，当峰值梯度超过这一临界梯度时，频率均从$\omega < 3\omega_s$跳变到另一分支$\omega > 10\omega_s$。文献Liu et al.

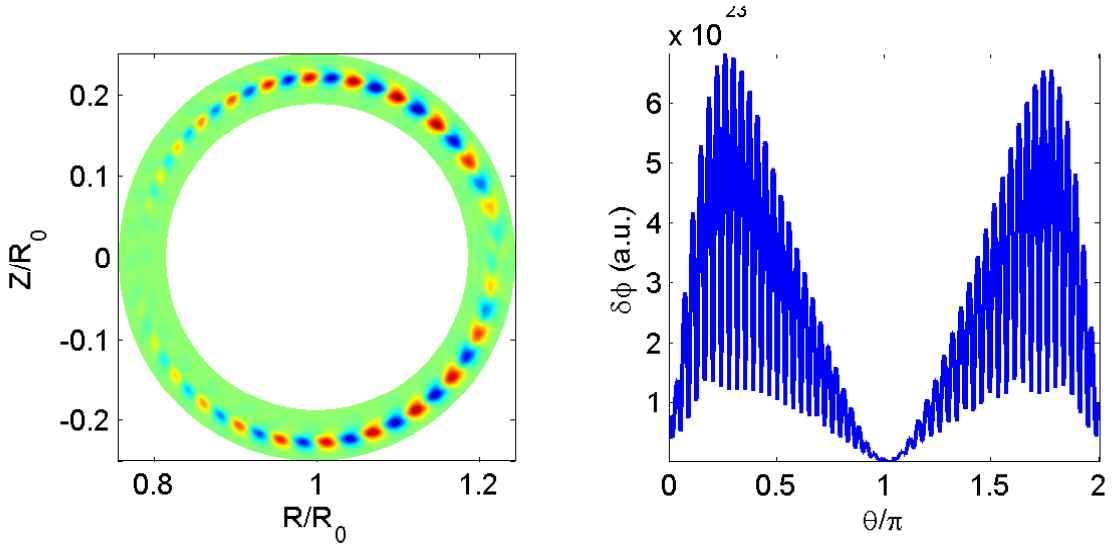

图 5.7 线性极向截面的模结构，$n = 10$。模包络面峰值对应的极向角θ_p不像弱梯度下典型的气球模结构一样为零。这里，$\theta_p \simeq \pm\pi/4$。

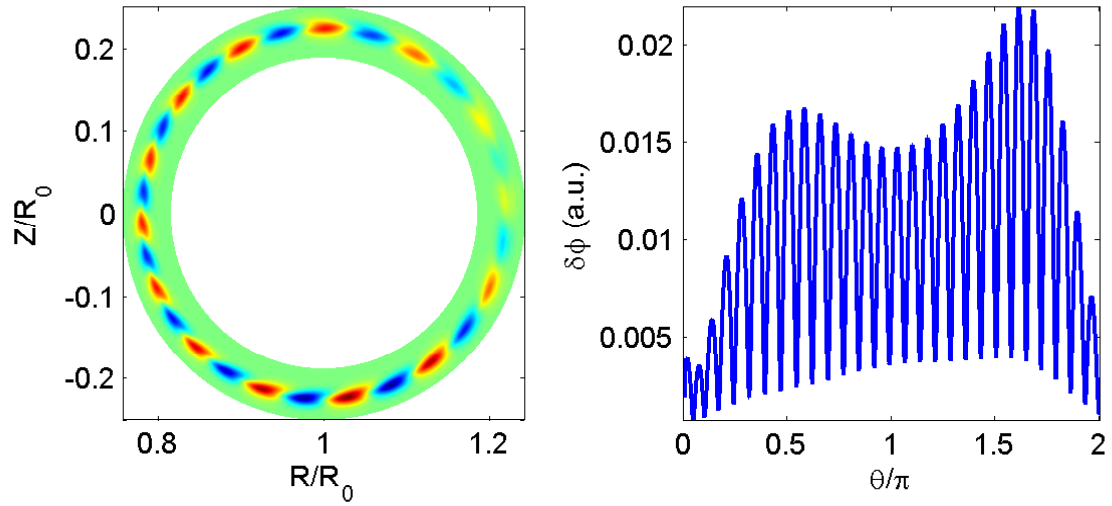

图 5.8 线性极向截面的模结构，$n = 5$。出现$|\theta_p| > \pi/2$，即反气球模结构。

(2010)中$RL_T^{-1} \simeq 40$比这里跳变的临界梯度($RL_T^{-1} \simeq 80$)小，而我们这里$RL_T^{-1} \simeq 160$比临界梯度大。Liu et al. (2010)的结果是弱梯度下模拟结果，他们模拟得到的频率与弱梯度下的实验频率相近；我们模拟关注的是强梯度实验，我们模拟得到的频率也与强梯度下实验频率相近。有意思的是，这个临界梯度，差不多就是实验中L模与H模跳变的梯度值(本章模拟中温度梯度和密度梯度是同时变化的，保持$\eta = L_T/L_n$不变)。因此，这个频率跳变是否与L-H转换有关，是值得进一步研究的事。

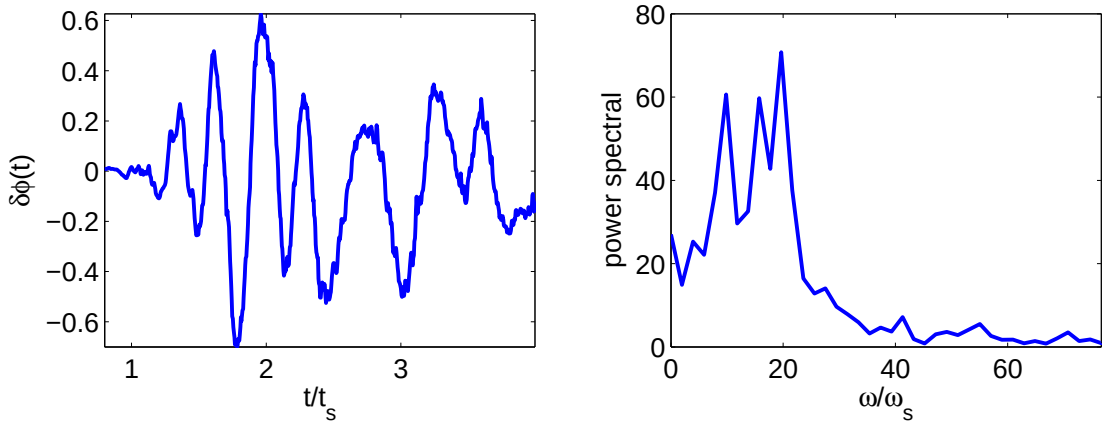

图 5.9　固定点$(r = r_c, \theta = \pi/2, \zeta = 0)$处的$\delta\phi(t)$随时间的非线性演化及相应的频率谱，其中$r_c$是模局域峰值的径向位置。非线性频率与图5.4中的线性频率依然相近，即，$\omega \simeq 15\omega_s$。

5.2.4　线性模结构

典型气球模结构中模幅峰值对应的极向角位置$\theta_p \simeq 0$，即外部中平面附近。对于这里强梯度下的极向模结构，已经不再是弱梯度下经常看到的典型气球模结构。主要的不同是峰值对应的极向角位置θ_p，它不再为零而可以是任意值。在我们的模拟中，使用不同的剖面和环向模数，$|\theta_p|$小于、约等于和大于$\pi/2$都有看到。图5.7显示了峰值$\theta_p \simeq \pm\pi/4$的一个结果，图5.8显示的结果表明甚至可出现$|\theta_p| > \pi/2$。这种非常规的模结构主要由强梯度导致[22]，其本源我们将在第6章讨论。

5.3　非线性结果

如前所述，线性模拟预计的极向模数远大于实验测量值，而且实验中的频率诊断方式也与这里线性单n模拟的测量方式不同。此外实验中测量到的一般是湍流饱和阶段的频谱。因此一般而言，我们需要进行非线性模拟才能真正与实验对比。

5.3.1　非线性频率

实验频率是从一个固定点的探针数据中获得的。因此我们进行非线性模拟，取一个固定点的静电势扰动信号$\delta\phi(t)$，用来计算非线性的频率。结果显示在图5.9中。我们看到非线性的频率依然接近此前线性模拟的频率，即$\omega \simeq 15\omega_s$，所以非线性频率依然与实验值基本相符。改用实验的温度$T_e = 50eV$同时加上碰撞，图5.10 显示非线性频率改变不大，依然在实验值附近。总之，可以认为模拟得到的频率与实验相符。

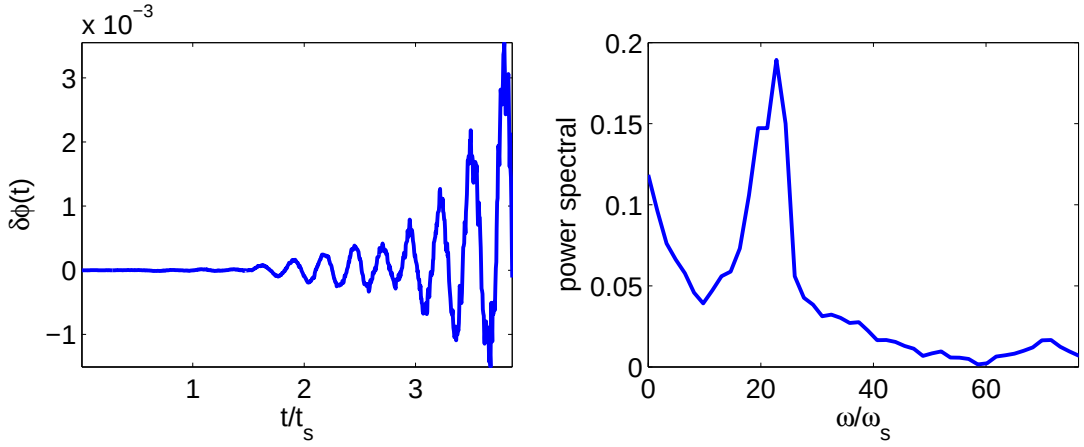

图 5.10 用实验温度$T_e = 50eV$同时加碰撞，对模拟结果改变不大，$\omega \simeq 20\omega_s$。

5.3.2 非线性谱逆坍缩

从上面的模拟和实验对比可知，由线性最大增长率预计的极向谱m远远大于实验观测值。在进行非线性模拟后，我们发现极向谱的非线性演化可以提供合理的解释。如图5.11所示，模拟中可看到极向谱的非线性逆坍缩/级联(reverse cascading)[4]。峰值m从初始较大的值逐步下移到较小的实验值。到非线性的后期($t = 2000t_0$)，峰值$m = 12 - 38$，与实验值$m = 14 - 33$基本一致。

这种极向模数m下移也在其他情形中看到，如文献Fu et al (2012)[130]的电子温度梯度模(ETG)、文献Lang et al (2008)[131]和Xiao et al (2010)[132]中的CTEM 及文献Wang et al (2007)[133]中的ITG。在这些结果中，极向谱下移被认为是模-模耦合导致的。不过，对于这里强梯度的模拟，我们发现谱下移的机制可能并非多模耦合，而是来自单模自身的非线性饱和。图5.12显示$\delta\phi(t)$方均根(root-mean-square)和电子热输运系数χ_e随时间的非线性演化情况。模拟中分别包含单n和多n的结果。每条曲线对应的模拟参数和网格都完全一样。唯一的差别是哪些模在模拟中被保留。标注的$n = 01$到30意思是单n模拟，而把所有其他模都滤掉；zf=0 意思是所有n都被保留但带状流和带状密度被滤掉；zf=2意思是所有n 包括带状流均被保留。

图中可看到，单模模拟中，非线性饱和幅度(saturation level)A与线性增长率γ间没有明显关系。比如，$n = 20$模的增长率比$n = 15$的要大，但是饱和幅度却差不多。$n = 15, 20$的模有较高的饱和幅，但同时饱和后也衰减非常快。$n = 10$的模的增长率较小，饱和幅也较小，但是饱和后无明显衰减，从而在非线性后期占主导。把这些单模模拟结果直接叠加起来，其峰值m的演化与多模耦合的非常相似。我们可以看到，在$t = 800t_0$时，主导

[4]逆坍缩指谱空间能量从高k向低k转移，在等离子体中常见，大结构处于低能态；坍缩(cascading)是谱空间能量从低k向高k转移，在普通流体中常见，小结构处于低能态。

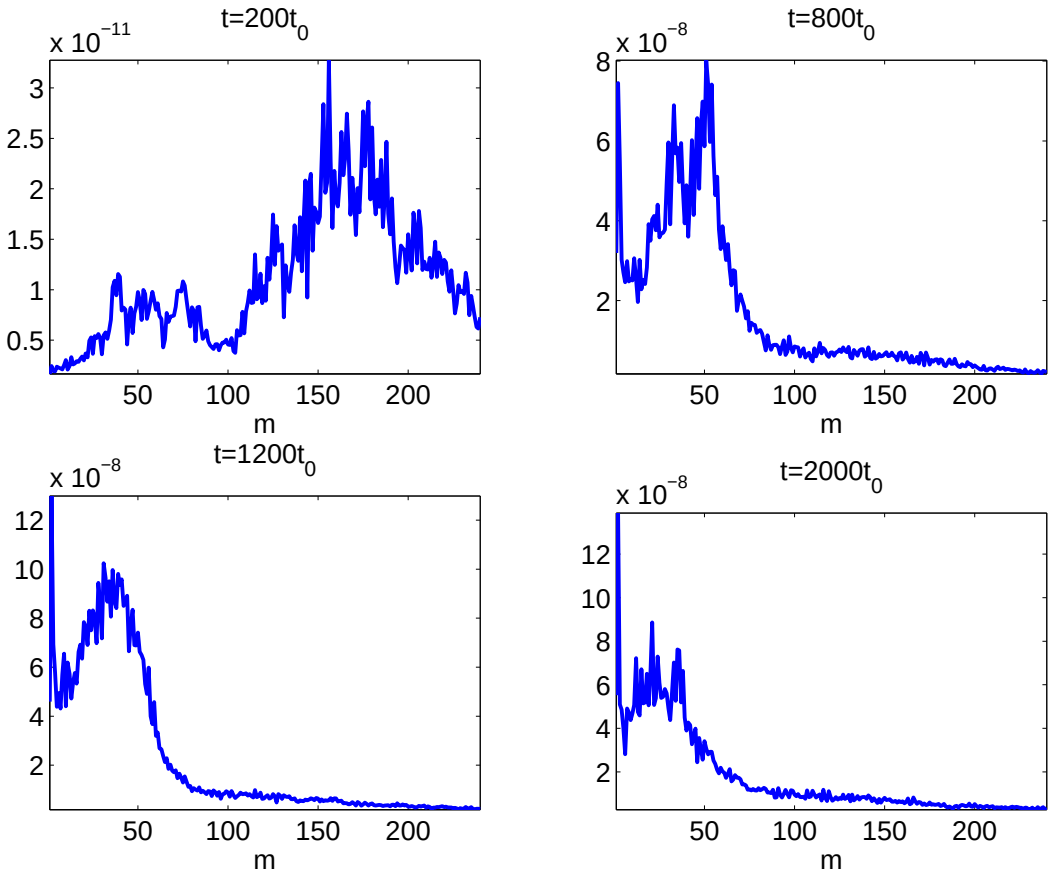

图 **5.11** 不同模拟时刻的极向谱。非线性逆坍缩使得峰值m下移到$m = 12 - 38$，与实验值$m = 14 - 33$接近。

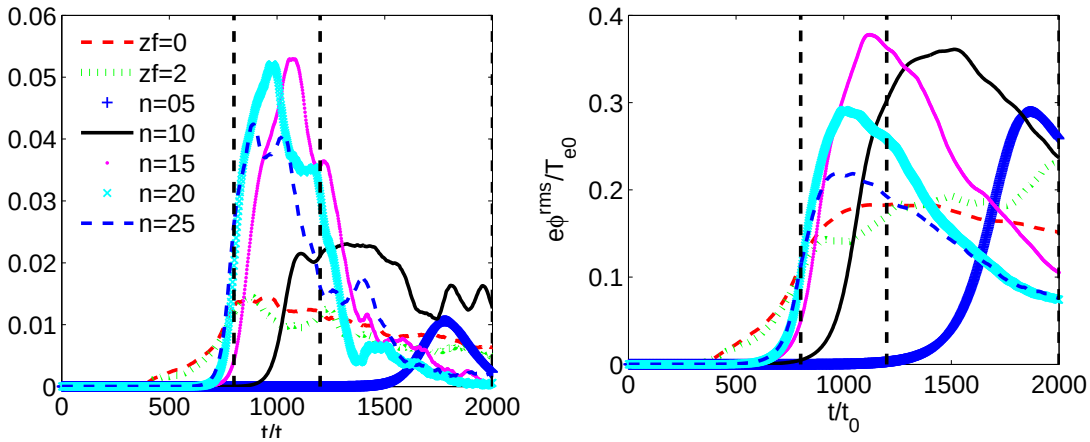

图 **5.12** 电子热输运系数χ_e和$\delta\phi(t)$方均根在单n和多n非线性模拟中的演化。这里显示多模耦合并非m下移的原因。

的单模是$n \simeq 20-25$，给出$m \simeq nq \simeq 65$；在$t = 1200t_0$时，$n \simeq 15$给出$m \simeq nq \simeq 40$；在$t = 2000t_0$时，$n \simeq 10$给出$m \simeq nq \simeq 26$。这些结果与图5.11的多模结果非常接近，这表明在这里多模耦合并非极向谱下移的主要原因。

另外，极向模数m的下移在有无带状模的情况下都观察到，因此谱的逆坍缩在这里与带状模也关系不大。图5.12左图，zf=0,2的对比，输运系数差别不大，表明此时带状流并无明显抑制输运的作用。我们在第7章细讨论强梯度下非线性输运的不同。

这里的结果与文献Lang et al (2008)[131]模拟参数最主要的差别是一个强梯度一个弱梯度，但得到的物理图景却不同。这表明H模强梯度的静电物理可能确实与L模弱梯度下不同，其主导的非线性演化机制可能已经改变。

5.4 总结和讨论

在本章中我们根据实验参数进行了HL-2A托卡马克H模下的静电模拟。HL-2A实验中主要的边界静电模通过模拟被辨认为CTEM，同时模拟的线性和非线性频率与实验一致。线性模拟得到的模数远高于实验值，但是在非线性阶段模拟极向谱m会下移，到饱和阶段也与实验符合很好。这表明，对于H模的静电微观物理，回旋动理学模型及GTC代码基本能正确描述实验中的主要湍流特征。

我们进一步通过模拟发现弱梯度和强梯度驱动情况下湍流属性有许多不同。当梯度从小值加大时，频率会有一个跳变：从$\omega < 3\omega_s$到$\omega > 10\omega_s$。这种现象很可能与L-H转换相关。我们还发现由于强梯度的驱动，模结构局域的极向角峰值θ_p可以从0到2π任意值变换。另外，非线性m下移的机制也更像是单模本身非线性演化的叠加导致，而非此前L模下所认为的多模耦合所致。这些结果都需要新的理论解释。

6 微观不稳定性的非常规气球模结构

在第5章模拟HL-2A静电边界H模强梯度下的微观不稳定性时，我们已经看到其特征模式(TEM)的模结构已经不再像传统那样局域在外侧中平面附近。这一章，我们讨论其物理本源，及其对整个边界微观不稳定性图景的全新理解。

如绪论中所提及，尽管已经提出了各种理论模型[51]，但磁约束聚变中L-H转换及H模的物理，至今未能完整理解[43]。在临近转换点的过程，实验上观察到所谓的极限环振荡(limit-cycle oscillation，LCO)，并用分叉模型[5]或捕食者-猎物模型建模[8]。不过，实验上依然不时能发现超出此前模型预计的新类型的动力学过程，如最近文献[134;135]中报道的实验上新发现的LCO反转以及带状流有可能不明显的情况。因此理解H模物理及L-H转换，不仅仅对实现聚变有意义，也对非线性物理的研究有价值。

L和H态，也可被称为L和H相(phase)[43]，所以L-H转换也被看作为“相变”[5]。我们这一章的研究将显示，L-H转换，可能更类似于量子力学中的能级跃迁，也即L模和H模对应的微观不稳定性处于不同的本征态。

在本章我们将证明两种主要的静电漂移波[57]微观不稳定性(即TEM和ITG)的线性属性在H模(强梯度)和L模(弱梯度)下完全不同。在强梯度和弱梯度驱动下的线性本征模不仅有着不同的频率，而且模结构的特征也不同。下面我们从漂移波的非常规模结构讨论起，给出最普遍情况下的模拟和理论结果。

6.1 前人的结果

在传统弱梯度下，漂移波不稳定性(如ITG和TEM)具有气球模类型的结构，峰值局域在托卡马克中平面的外侧(参看文献[19;20;136]和附录C)。这种类型的解已经被气球模表象(ballooning-representation)[113;137]理论大量的研究过，在气球模表象下原始的二维本征方程可以简化为两个一维本征方程来求解。由此此前发现的气球模空间中最不稳定的解通常在气球模参数$\vartheta_k = 0$[58]处取得，它对应于实空间中局域在外侧的解，即$\theta_p = 0$，这里我们定义θ_p为模结构的极向峰值角度。因为上述原因，许多局域本征代码如HD7[86]通常

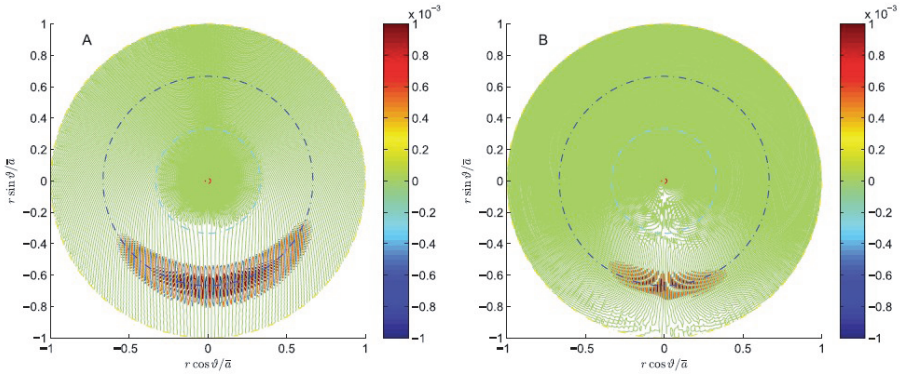

图 6.1　基于气球模理论，文献[19]得出模结构局域在$\theta_p \simeq -\pi/2$的模可以存在(取自文献[19])。

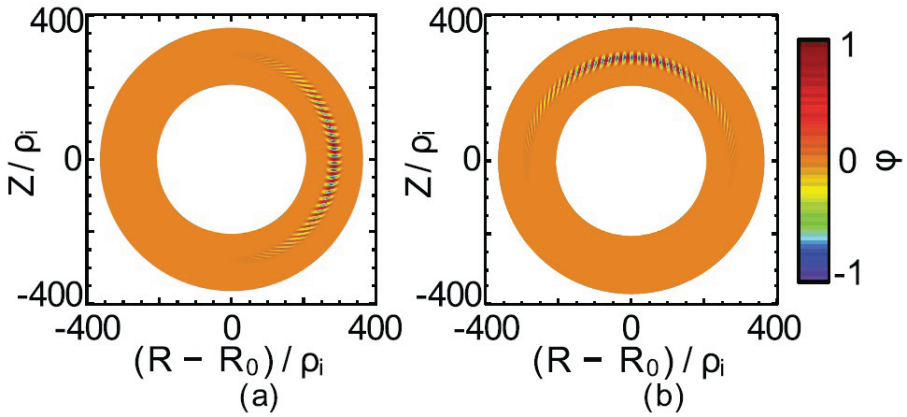

图 6.2　基于二维本征解，文献[20]得出对于不同剖面时模结构局域在$\theta_p \simeq \pi/2$的模可以存在(取自文献[20])。

都隐式的假定$\vartheta_k = 0$。最近，非常规的本征模结构$\vartheta_k \neq 0$已经在强梯度参数下有人发现，如$|\theta_p| \simeq$或$< \pi/2$已经被证明可存在[19–22]，见图6.1-6.4。

这里我们将给出第一性原理模拟下最普遍情况下的本征模结构，同时我们发现常规和非常规模结构通常对应漂移波不同的本征态，本征态跳变的临界梯度也恰好与实验上L-H转换时的梯度在同一范围。

6.2　TEM和ITG模拟结果

我们首先给出回旋动理学粒子代码GTC[80;83]单环向模数n下线性静电模拟结果。模拟参数和剖面与第5章HL-2A托卡马克H模实验类似：环向磁场$B_0 = 1.35T$，小半径$a = 40cm$，大半径$R_0 = 165cm$，安全因子$q = 2.5-3.0$，磁剪切$s = 0.3-1.0$，$R_0/L_T = 80-160$，同时$T_e(r) = T_i(r)$及$n_e(r) = n_i(r)$。L_n和L_T为密度和温度梯度尺度长度。为了简化，我们首先用$\eta = L_n/L_T \simeq 1.0$。模拟中典型的弱梯度和强梯度的剖面显示在图6.7中。其中部

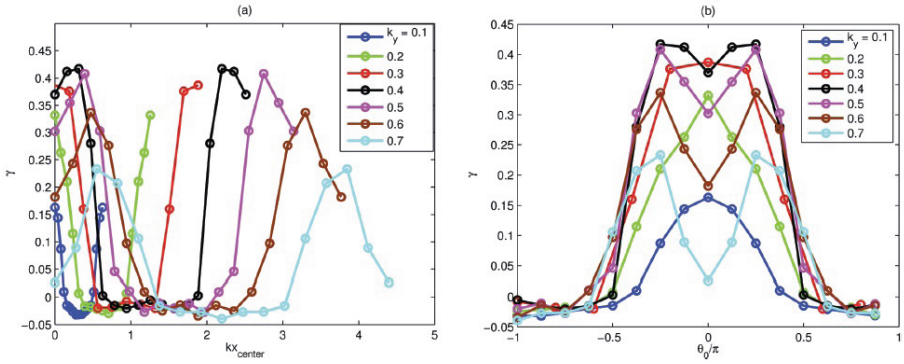

图 6.3　基于局域模型，文献[21]得出梯度较强时最不稳定的模可以是气球角$\vartheta_k \neq 0$(取自文献[21])。

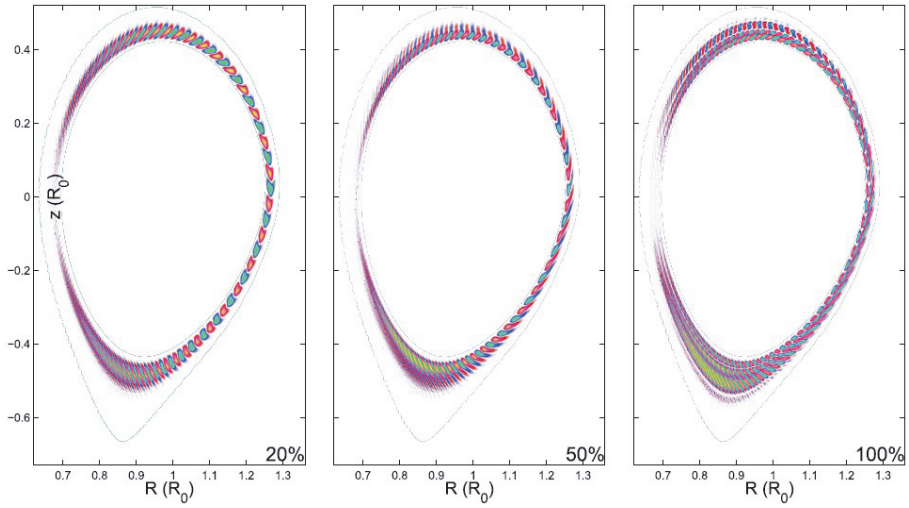

图 6.4　基于GTC模拟，文献[22]得出梯度由弱变强时占主导的模的模结构的局域位置会从$\theta_p \simeq 0$变到$\theta_p \simeq \pm\pi/2$(取自文献[22])。

分结果包含了碰撞，但发现对普适的结果影响不大。我们发现在这些参数下使用绝热电子模型并不存在不稳定性或者只存在弱不稳定性，因此这里得到的主要是动理学电子导致的捕获电子模。

图6.5更新自第5章的图5.6，其中清楚的显示了最不稳定的TEMs 在L模和H模下属于不同的分支。左边分支对应的频率和模数与H模的实验值相近，而右边分支对应的频率远小于实验值。在临界梯度附近，图6.6显示两支模同时存在。如图6.8所示，这些TEM模拟显示了既有常规又有非常规的模结构，针对不同的温度梯度和环向模数($n = 5 - 30$)。以前未见的新属性包括：a). 可以存在反气球模(anti-ballooning)结构，即$|\theta_p| > \pi/2$，如图6.8g; b). 模可以存在多峰(如图6.8b)。考虑到捕获电子和坏曲率一般在低场侧，也即外侧，这里电势的反气球结构超出了传统理解的预期，因而有新物理存在。三维静电势的模结构可以用傅里叶形式表出$\delta\phi(r,\theta,\zeta) = e^{in\zeta}\sum_m \delta\phi_m(r)e^{-im\theta}$，其中$m$是极向模数。为了进一步看清这些非常规模结构是如何形成的，我们计算一些典型的常规和非常规模结构的$\delta\phi_m(r)$，

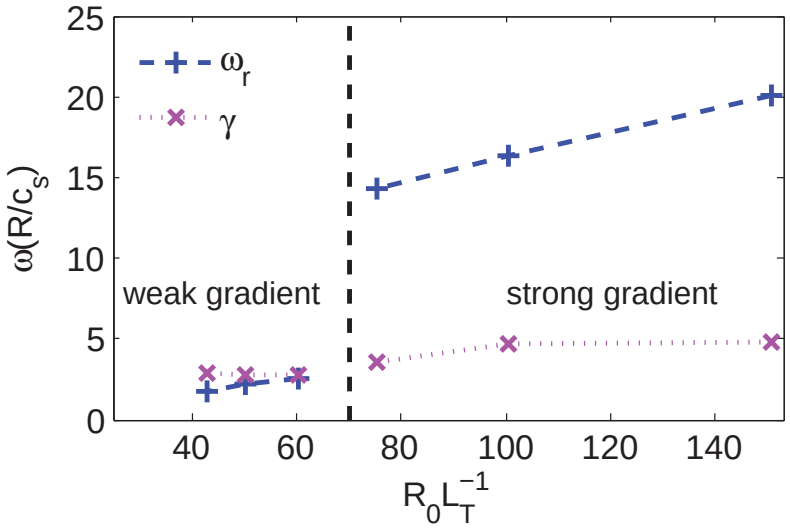

图 **6.5**　用不同的台基宽度模拟**HL-2A**实验，显示至少有两支模存在。当梯度超过临界值时，最不稳定模跳变到另一支。同时，这个临界梯度与实验中**L-H**转换的梯度相近。

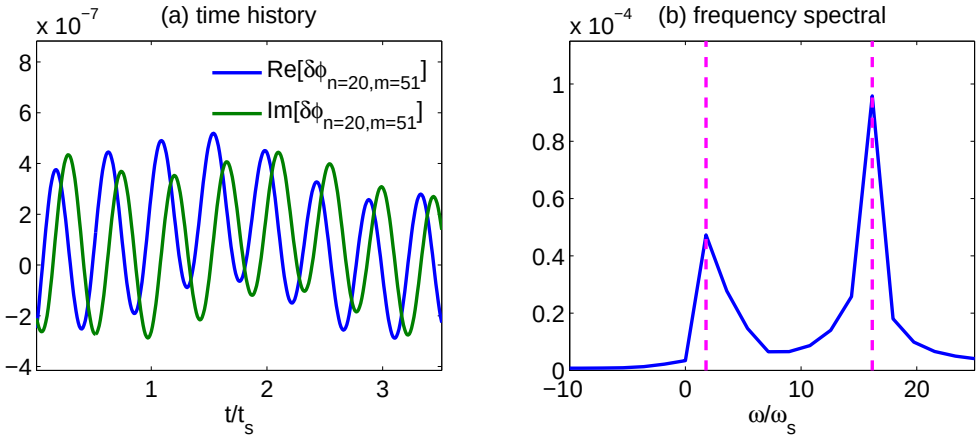

图 **6.6**　$RL_T^{-1} = 75$时，初始增长阶段，两支电子抗磁频率方向的模共存。

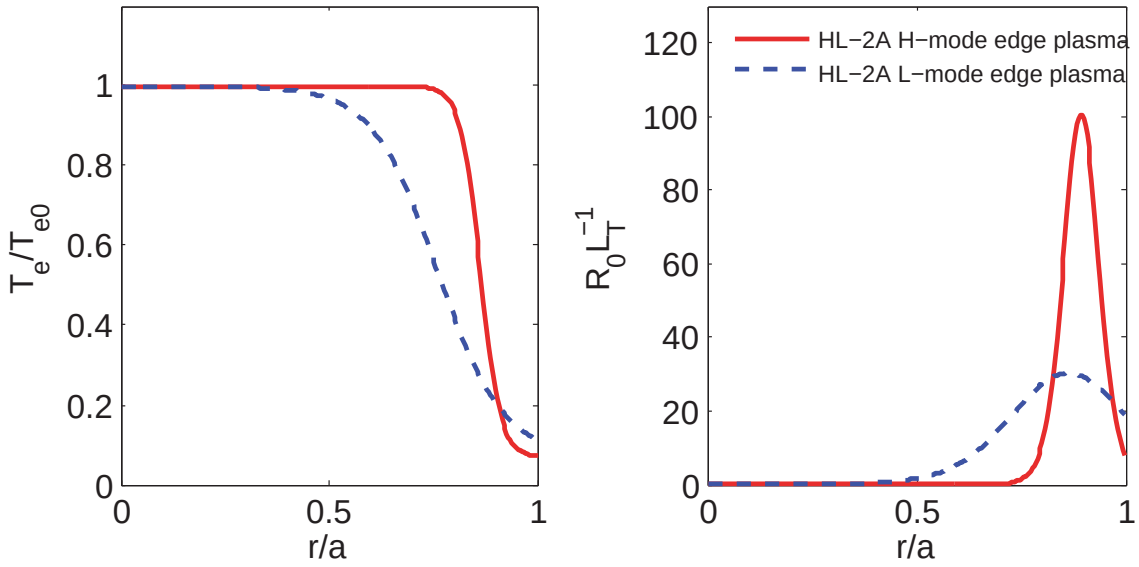

图 6.7　模拟中用到的典型弱梯度和强梯度剖面。

如图6.9所示。对于弱梯度下的常规气球模结构，极向本征模分量$\delta\phi_m(r)$基本是径向对称的(高斯形状)，幅度均正；同时$\delta\phi_m$与$\delta\phi_{m+1}$基本重叠，即$\delta\phi_m \simeq \delta\phi_{m+1}$；另外$\delta\phi_m(r)$峰值基本在有理面附近，即$m \simeq nq$。但对于非常规结构，极向本征模分量$\delta\phi_m(r)$没有前面明显的特征，即可对称又可反对称，幅度也可正可负，如图b, c和d。图中进一步显示，强梯度下的模结构，$\delta\phi_m(r)$峰值已经不再在有理面附近，也即可以$|m - nq| \gg 1$。

接下来，通过降低密度梯度(保持温度梯度不变)我们来考虑ITG模。为了完全排除动理学电子的贡献，我们使用绝热电子进行模拟。可以发现，前面的非常规模结构依然存在，并且具有更丰富的变化。如图6.10a&b显示了反气球结构。实际上，具有全局剖面时，初值模拟中多模共存会使得模结构更复杂。比如，两模有相近的增长率时，可以在不同的径向位置被激发(图6.10c&d)。初值模拟中相近的峰值位置的多模共存还能导致$\theta_p = \theta_p(t)$，也即随着时间增加峰值极向角在转动。

综上所述，这些非常规模结构不限于TEM，而是强梯度驱动下的漂移波中普遍存在的。

6.3　本征理论

我们试图用下面的本征模分析来理解以上非常规的线性行为。我们从ITG的本征方程

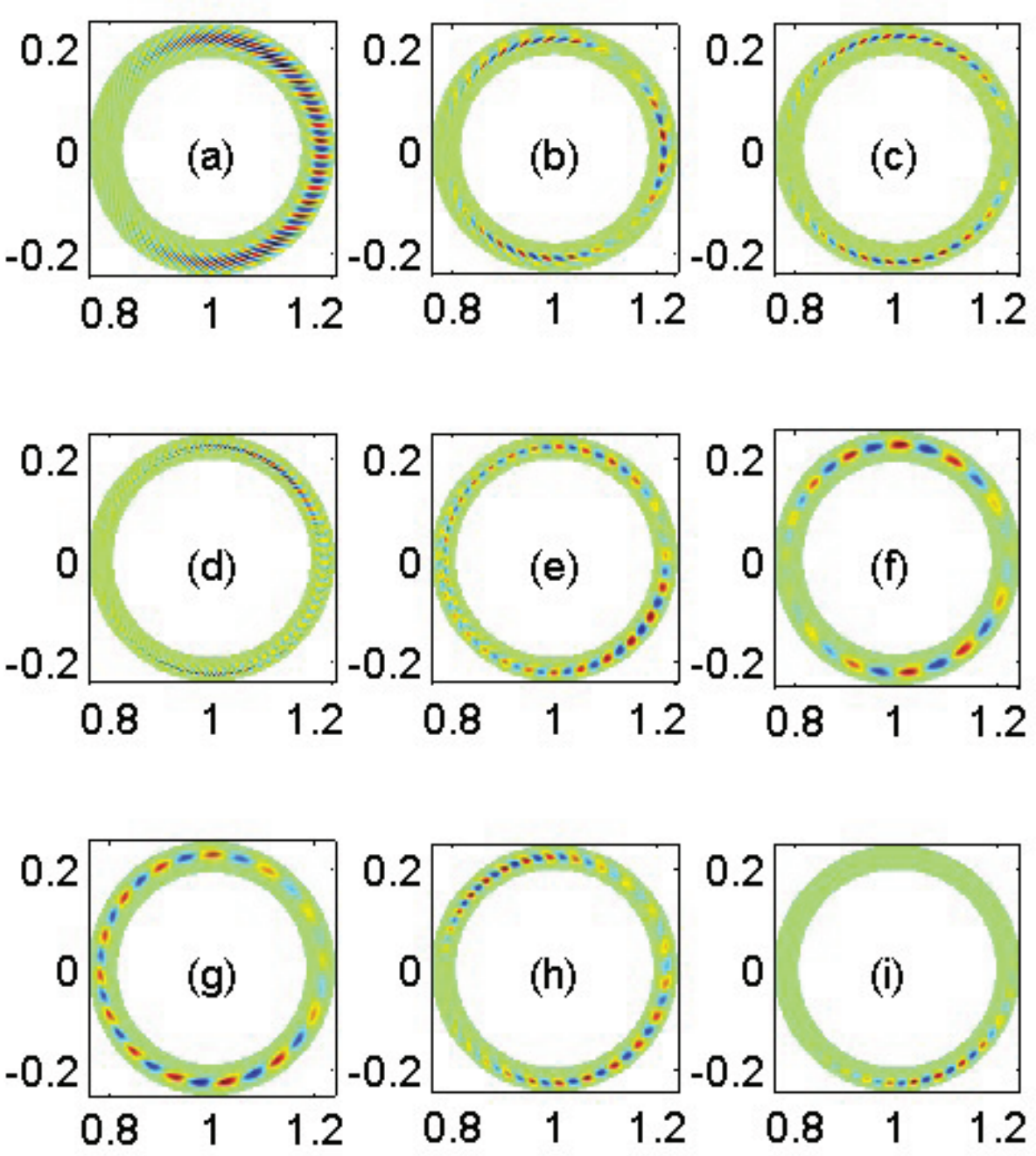

图 **6.8** **GTC静电模拟TEM中静电势在极向截面**(X, Z)**平面上的常规(a)和非常规(b-i)气球结构。(a)使用了L模的弱梯度参数(**$R_0 L_T^{-1} < 40$**)，而(b)-(i)使用了强梯度H模参数(**$R_0 L_T^{-1} > 80$**)。只(e)和(g)包含了碰撞。**

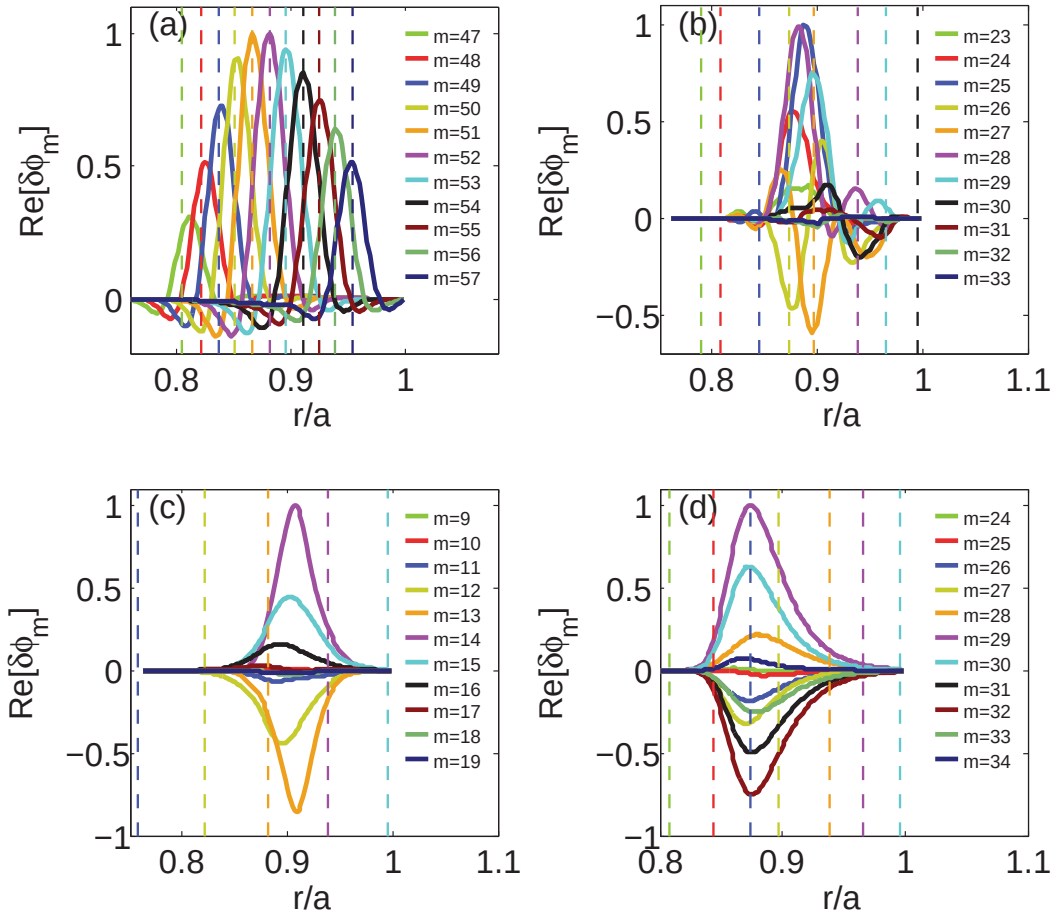

图 6.9　常规和非常规模结构傅里叶分量$\delta\phi_m(r)$的实部。(a)-(d) (环向模数n分别为20、10、5和10)分别对应的是图6.8的(a), (b), (g)和(i)。虚线为相应的有理面r_s，使得$m = nq(r_s)$。

出发[20;137]

$$\left[\rho_i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\sigma^2}{\omega^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + ik_\theta sx\right)^2 - \frac{2\epsilon_n}{\omega}\left(\cos\theta + \frac{i\sin\theta}{k_\theta}\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\omega-1}{\omega+\eta_s} - k_\theta^2\rho_i^2\right]\delta\phi(x,\theta) = 0, \tag{6.1}$$

其中$\sigma = \epsilon_n/(qk_\theta\rho_i)$，$\epsilon_n = L_n/R_0$，$\eta_s = 1+\eta_i$，$x = r - r_s$，$r_s$为有理面，$\omega = \omega_r + i\gamma$为电子抗磁频率$\omega_{*e}$归一化的复数模频率，及极向波数$k_\theta = nq/r$。方程(6.1)可以从回旋动理学理论中使用绝热电子假设推导得到。相应的气球模空间的一维方程为

$$\left\{\frac{\sigma^2}{\omega^2}\frac{d^2}{d\vartheta^2} + k_\theta^2\rho_i^2[1 + s^2(\vartheta-\vartheta_k)^2] + \frac{2\epsilon_n}{\omega}[\cos\vartheta + s(\vartheta-\vartheta_k)\sin\vartheta] + \frac{\omega-1}{\omega+\eta_s}\right\}\delta\hat{\phi}(\vartheta,\vartheta_k) = 0, \tag{6.2}$$

这里ϑ_k是气球角参数，它代表一个待确定的径向波数[137]。使用傅里叶基$\delta\phi(x,\theta) =$

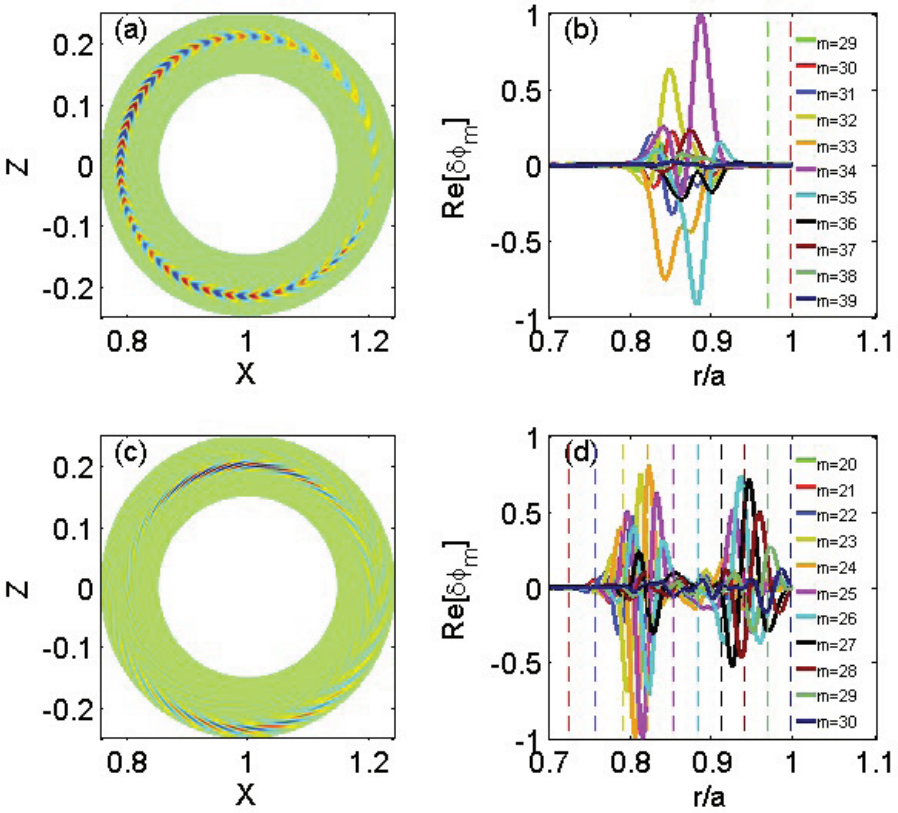

图 6.10　GTC中非常规的ITG模结构。(a & b) 反气球结构。(c & d) 两模共存(或，单模有两个径向峰)于不同的径向位置。一个$\theta_p \simeq \pi/2$，另一个$\theta_p \simeq -\pi/2$。

$\sum_m u_m e^{-im\theta}$，方程(6.1)可以重写成二维本征模方程

$$k_\theta^2\rho_i^2 s^2\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2} + \frac{\sigma^2}{\omega^2}(z-m)^2 u_m - \frac{\epsilon_n}{\omega}\left[\left(1 - s\frac{\partial}{\partial z}\right)u_{m-1} + \left(1 + s\frac{\partial}{\partial z}\right)u_{m-1}\right] - \left(\frac{\omega - 1}{\omega + \eta_s} + k_\theta^2\rho_i^2\right)u_m = 0, \tag{6.3}$$

这里$z = k_\theta s x$。就像前面我们求解方程(4.6)一样，为了求解方程(6.3)的本征问题，我们只需要保留部分m模。

我们注意到在合适的近似下(一维情况参见文献[138])，方程(6.2)和(6.3)均可以退化成Weber方程$u'' + (bx^2 + a)u = 0$，有本征解对应本征值$a(\omega) = i(2l+1)\sqrt{b(\omega)}$和本征函数$u(x) = H_l(i\sqrt{b}x)e^{-ibx^2/2}$，这里$H_l$是$l$阶Hermite多项式，而$l = 0, 1, 2, ...$代表系列本征态。对于原始方程，即方程(6.2)和(6.3)，只能通过数值解，其本征态形式更复杂，无法用Hermite多项式直接描述。下面我们将用数值方法求解方程(6.2)和(6.3)证明l本征态的存在性。

方程(6.2)和(6.3)可以通过变换到矩阵本征值问题$\omega^3\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{X} + \omega^2\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{X} + \omega\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X} + \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{X} = 0$(附录B)而数值解。我们使用有限差分离散整个系统，它导致稀疏矩阵$\boldsymbol{M}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$。使用伴侣矩阵(companion matrix)方法(3.2节)，这个非线性本征值问题可以转化为标准的线

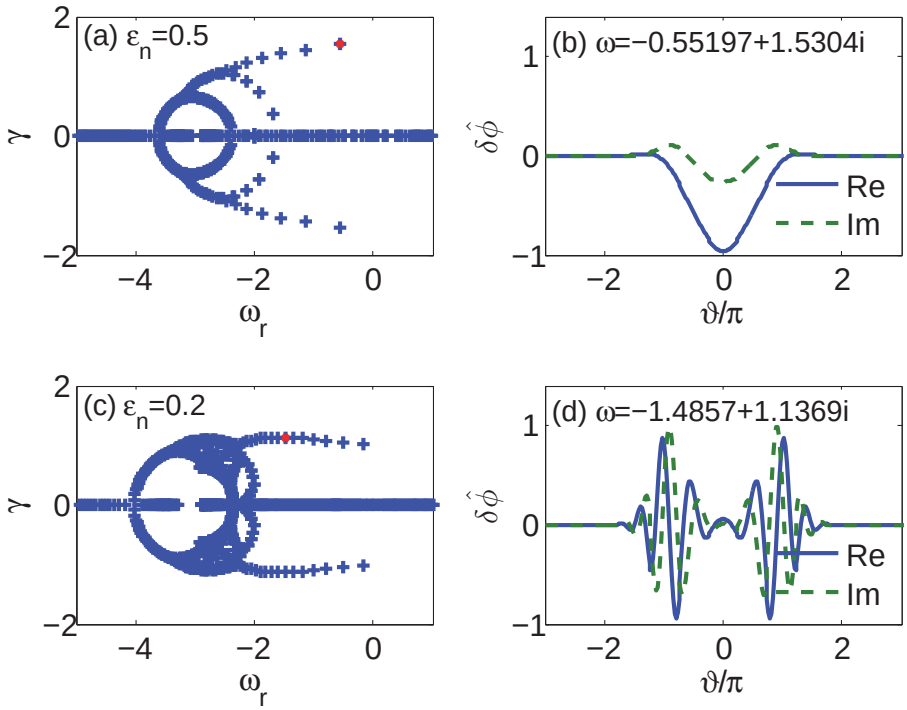

图 6.11　方程(6.2)中，系列根存在。存在一个临界梯度，使得最不稳定的根从基态跳到非基态。对弱梯度($\epsilon_n = 0.5$)，最不稳定(红色'x')的是基态(a&b)，代表常规气球模结构。对强梯度($\epsilon_n = 0.2$)，最不稳定(红色'x')的为非基态(c&d)，代表非常规气球模结构。

性本征值问题$\boldsymbol{AY} = \omega \boldsymbol{BY}$。因此，这个本征系统的所有根都可得到(参见第4章类似的处理方法)。这种方法的优点在于它能给出离散本征系统的所有根，从而帮助我们理解本征值在复平面的分布和随参数的变化。文献[19;20]中使用迭代(iterative)法的解实际上只是我们这里的一个解，同时并不一定是最不稳定或最重要的一个，因为迭代法得到的解与初值选取很有关。同时这里的伴侣矩阵法也与打靶法的数值解和解析解验证过。

我们发现，在强梯度下通过在一维气球空间中求解方程(6.2)能够再现非常规气球模结构，同时最不稳定的根要么非基态($l \neq 0$)，要么气球角$\vartheta_k \neq 0$。对于最不稳定的根$\vartheta_k \neq 0$，已经有一些文献讨论过(如[21;139])，这里我们主要讨论非基态导致的非常规气球模结构。我们以如下参数求解方程(6.2)为例：$s = 0.8$，$k_\theta \rho_i = 0.4$，$q = 1.0$，$\eta_s = 3.0$及$\vartheta_k = 0$。与前面的解析解类似，图6.11显示方程(6.2)中存在系列解。对于弱梯度($\epsilon_n = 0.5$)，我们发现最不稳定的解为基态(图6.11a)，对应常规模结构(图6.11b)。对强梯度($\epsilon_n = 0.2$)，最不稳定的根为非基态(图6.11c&d)，对应非常规模结构。另外注意图中的频率归一化为电子抗磁频率$\omega_{*e} \propto \epsilon_n^{-1}$。

为了保证以上结果是物理的而非数值误差导致的，我们进一步加密网格，验证图6.11的收敛性。图6.11用的格点参数为$N_\theta = 1024$和$\vartheta = [-20, 20]$。加密网格和计算区间

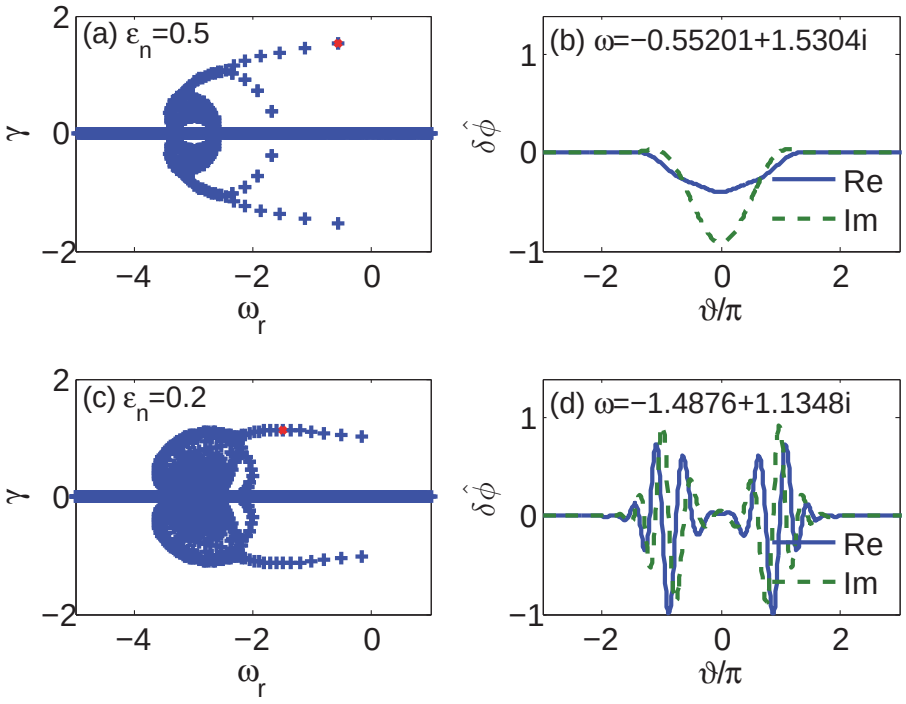

图 6.12　方程(6.2)在密网格$N_\theta = 3072$ 和宽计算区间$\vartheta = [-40, 40]$时的数值解，验证了图6.11对主要根是收敛的。

到$N_\theta = 3072$ 和$\vartheta = [-40, 40]$，结果显示在图6.12中，可以看到主要根与图6.11的分布是一致的，其最不稳定模频率和增长率三位有效数字与图6.11相同，模结构的不完全一致是因为线性本征解，模结构可以相差一复数的常数。我们也注意到，图6.12还有许多其他解和图6.11 中并不一致，这些解通常是离散本征谱的高阶解或者属于连续谱，需要极密的网格才能更精确的计算。这些解不是本文所关心的，因而无需进行收敛性验证。

另外我们从图6.11和图6.12可以看到，方程(6.2)的解针对实轴是对称的，即$\omega = \omega_r + i\omega_i$是方程的解则$\omega^* = \omega_r - i\omega_i$也是方程的解。这也可以对方程(6.2)取复共轭直接证明。这表明方程(6.2)对任何参数都存在$\omega_i \geq 0$的根(所有根都$\omega_i = 0$只在$\eta_i = 0$时取到)，而实际中ITG不会在任何参数下都不稳定。回旋动理学初值模拟中[136]也显示$k_\theta \rho_i$大时ITG增长率会小于零。因此我们这里的本征理论不是精确的定量理论。当然，只考虑基态根，随$k_\theta \rho_i$增大时其增长率确实可小于零，如文献[138]图2。

前面我们已经展示，在强梯度下最不稳定的解可以从基态跳变到其他非基态，这跟量子能级跳变很相似。物理上，这个跳变行为可以从有效势(effective potential)来理解[140](这里比量子力学中的更复杂，有效势阱跟本征值本身有关，且本征值为复数有虚部)。不同势阱间的跳跃导致不同的能级。不过一维气球空间中非基态解与二维极向面上非常规模结构的对应并不是太显然。接下来，我们需要求解二维本征方程(6.3)来证实，非基态的

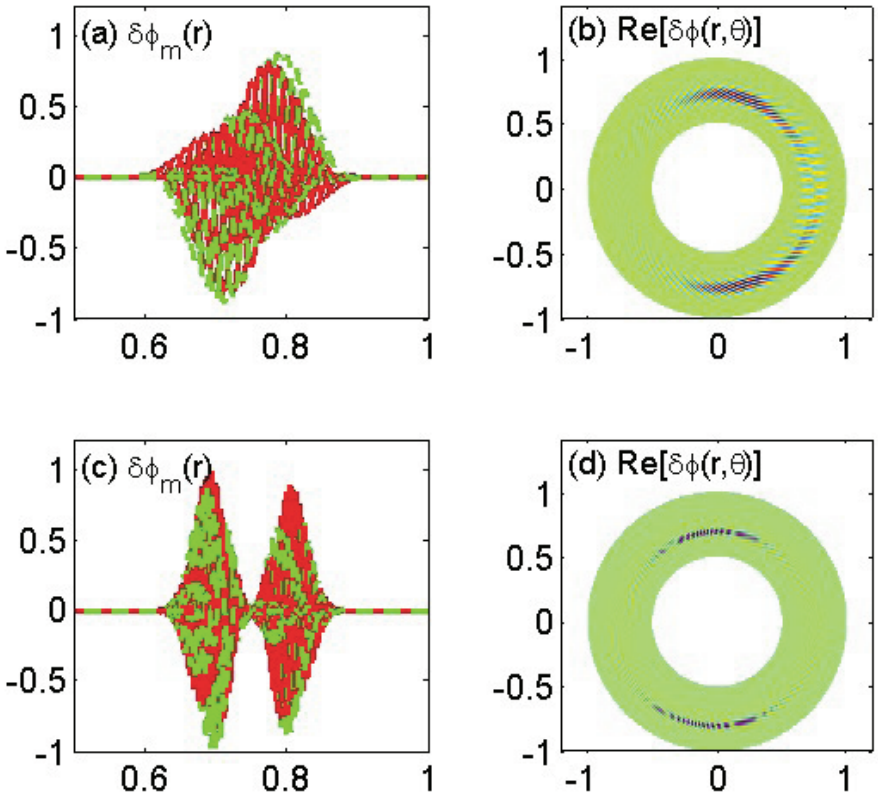

图 6.13　二维方程(6.3)本征解中典型的非传统模结构。(b)跟图6.8(c&d)类似，而(c&d)跟图6.10(d&c)类似。

二维本征解确实对应前面回旋动理学模拟中非常规的模结构。文献[19–21]中的解只是系列解中弱对称的特解，几乎图6.8和图6.10中所有的模结构都在二维本征方程(6.3)的解中看到。图6.13给出了两个例子。因而常规和非常规系列解，既在GTC初值模拟中看到，又在二维本征解中看到。最不稳定根从基态跳变到非基态的条件是$\epsilon_n < \epsilon_c$，其中ϵ_c是一个与其他参数相关的临界梯度参数。GTC模拟HL-2A实验参数中，典型的临界温度[1]梯度值为$R_0/L_T = 40 - 120$，这个值差不多就是实验上L-H 转换的梯度值范围。

回旋动理学模拟和本征模分析显示，非常规模结构主要存在于强梯度或者H模情况下。弱梯度或L模时，依然以常规模结构为主。不同的模结构会导致不同的径向相干长度从而导致不同的输运强度，这表明H模和L模的输运行为应该不同。对于常规气球模结构，相邻傅里叶模$u_m \simeq u_{m+1}$，有效关联长度(effective correlation length)可以估计为模结构包络的宽度，即ΔA。而在非常规气球模结构中，尤其在反气球模结构中，可以出现$u_m \simeq -u_{m+1}$，即相邻傅里叶模出现180°相移，这有可能导致有效关联长度变为相邻模的有理面(rational

[1]也是临界密度梯度，本文暂未严格区分两者的影响，而是使用了相同的剖面，即$\eta = L_n/L_T = 1$。

surfaces)间距Δr_s。考虑到$\Delta r_s \ll \Delta A$，我们可以期望H模有更好的约束。或者，从径向关联长度变短的角度，输运特性可能从弱梯度下的扩散与对流并存转为更接近于纯扩散。当然要完整弄清这个问题，需要自洽的非线性回旋动理学模拟(参见下一章)。

总之，我们使用回旋动理学模拟发现了针对静电漂移波(TEM和ITG)非常普遍形式的非常规气球模结构，并证实它们在强梯度时普遍存在。通过本征方程的分析，这些非常规模结构被证明与非基态的本征解相对应。最不稳定根从基态跳变到非基态对应的梯度临界值恰好在实验中L-H转换的梯度附近，这表明实验的L-H转换与漂移波本征态的跳变密切有关，即聚变等离子体中L-H转换可能来源于微观不稳定性本征态的跳变。非常规模结构也提供了对H模为何约束更好的一个可能解释。同时，存在系列而非单一的非基态解，也暗含H模的物理将比L模的要更丰富。这可能给出了H模物理研究的一个新方向。这里发现的L-H跳变可能与能级跃迁相似，而不像相变，也可能是非线性物理一个具有普遍兴趣(general interest)的问题。

另外我们需要注意，本章的理论只是定性或者半定量的。并且图6.13的二维解中，只是示意强梯度下全局本征解的最不稳定根确实可以出现模拟中的非传统气球模结构，这里的剖面分布未完全如模拟中那样给定。这是因为方程(6.3)并非完整的全局方程，剖面的径向导数未完全包含。更完整的方程和求解类似于第4章中求解全局磁流体本征模，需要重新修正相关项。这一步没有原则性困难，也不会太多改变这里讨论的物理，但得到的解会更符合全局模拟。本章中指出模结构的改变是因为强梯度导致有效势阱改变，但并未细讨论如何改变以及精确的理解其中的物理，这一步也值得深入讨论。

7 强梯度下的输运反转

在前一章的线性物理中，我们已经发现线性临界梯度的存在，边界梯度超过该临界值，最不稳定的微观不稳定性处在非基态，不仅仅频率改变，模结构也改变。并且我们通过估算关联长度，猜测强梯度下模结构的改变将导致输运特性改变，比如输运下降。不过，我们还应该注意到随着梯度变大，尽管关联长度l_c可能变小，但增长率更大，因而关联时间τ_c也可能更短。从前面讨论可知输运系数$D = l_c^2/\tau_c$，从而输运系数不见得随梯度变大而变小，我们还需要看增长率和模结构谁对输运的改变作用大。

这一章，我们进一步基于回旋动理学模拟来回答上述问题，发现强梯度下确实输运系数下降，从而支持前一章线性的猜测。与前一章一样，我们这里暂未严格区分温度梯度还是密度梯度的影响，而是同时变化两者，这样保持$\eta = L_n/L_T$基本不变，使得微观不稳定性尽量维持为TEM(因为ITG通常在η较大时不稳定)。

后文，热输运系数(heat conductivity)χ_j通过粒子热通量(heat flux)$q_j = n_j\chi_j\nabla T_j$来定义，其中GTC中热通量用$q_j = \int d^3v(\frac{1}{2}m_jv^2 - \frac{3}{2}T_j)\delta v_r\delta f_j$计算[132]。这里$v$为粒子速度，$\delta v_r$为径向回旋平均的$E\times B$漂移，$\delta f_j$为扰动分布函数。粒子输运系数$D_j$的定义类似。

7.1 弱梯度下的传统结果

我们首先验证第2.5小节中关于湍流输运的两个传统结果：1. 梯度越大输运系数越大；2. 带状流明显抑制输运。图7.1是模拟得到的结果，温度和密度梯度大小同时改变，但保持L_T/L_n不变，梯度大小在L模范围内，分别为$RL_{T_e}^{-1} = 6.9$和13.0。这里的其他参数取Cyclone标准算例[17]的值，与Rewoldt et al (2007)[136]中算TEM 的同：$s = 0.78$，$q = 1.4$，$\kappa_{T_i} = R_0/L_{T_i} = 2.2$，$\kappa_n = R_0/L_n = 2.2$，其中$L_n = -d\ln n/dr$和$L_T = -d\ln T/dr$。我们可以看到，确实梯度越大增长率越大，且输运系数越大；包含带状流时，输运明显被抑制。这些模拟结果符合传统的预期[17](第2章)。

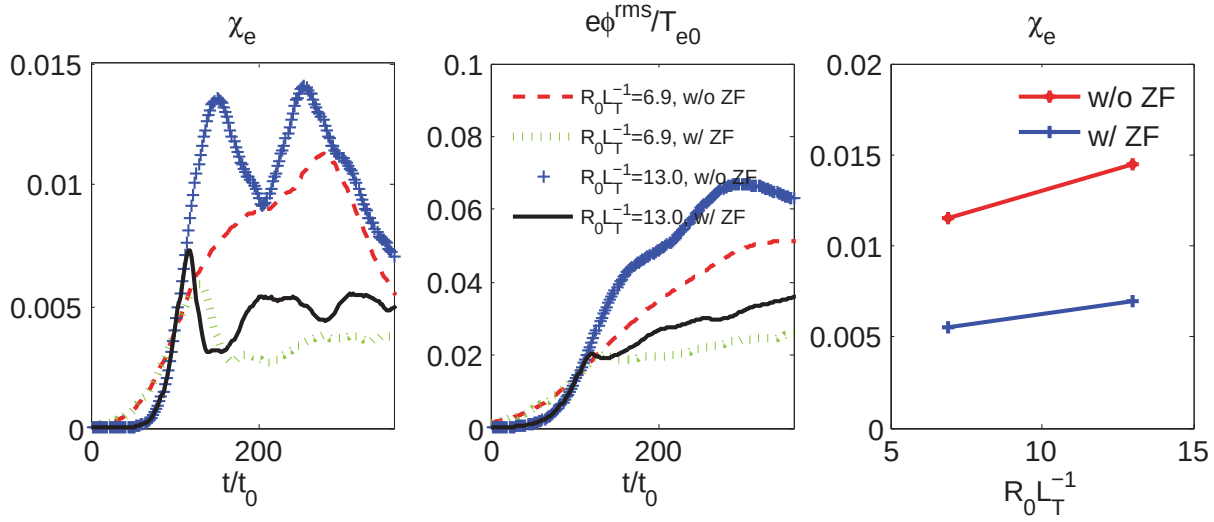

图 **7.1**　弱梯度下，带状流明显抑制输运，梯度越大输运系数越大。

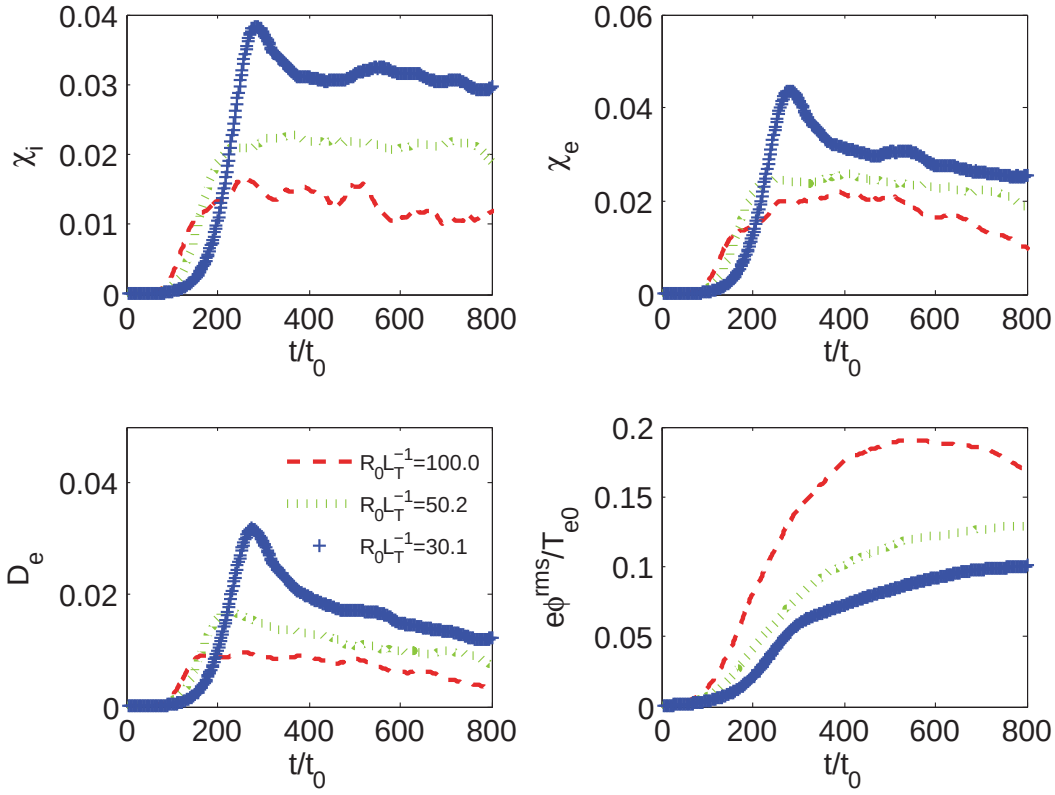

图 **7.2**　强梯度下，梯度越大输运系数越小。

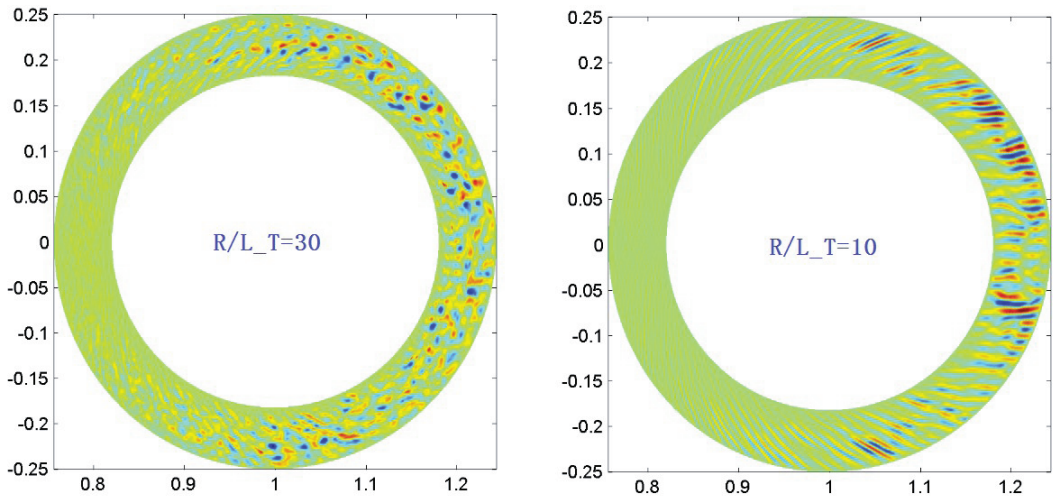

图 7.3　强梯度和弱梯度的非线性模结构对比。

7.2　强梯度下的输运反转

我们再来扫描强梯度下结果，这里除了温度和密度梯度外其他参数与第5和6章用的参数相近。图7.2 中的三组梯度值均较大，$RL_T^{-1} = 30.1, 50.2, 100.0$，尤其后两者均在HL-2A的H 模边界梯度范围内。从图7.2中可以看到输运系数的变化趋势与弱梯度下的完全不同，此时梯度越大，电势扰动依然越大，增长率也越大，但输运系数却反而越小。图7.3给出梯度较大和梯度较小两组参数的典型模结构图(为了更好的对比微观不稳定性本身模结构对湍流输运的影响，两张图均为滤掉带状流情况下的模拟结果)，可以看到梯度大时模结构很乱，关联长度很小；而梯度小时，径向流状(streamer[1]) 结构较明显，关联长度大。这个结果表明，关联长度减小带来的输运减少确实能压制关联时间减少带来的输运增加，从而总体输运系数下降，符合前一章基于线性非常规模结构的猜测。

完整的梯度扫描在图7.4中给出，可以看到存在输运系数反转的临界点：在临界点以下，输运系数随着梯度增加而增加；超过临界点后，输运系数随着梯度增加而减少。其中红线虚线是根据第2章增长率大输运系数大的常规结论定性画出的。

7.3　静电结果总结

在这里我们总结第5到7章的静电模拟和理论结果。表7.1是我们所有新结果的总结。这些结果对传统的湍流输运图象提出了多种限制。从证据的充分性来看，表中第一条线性的系列本征态和强梯度下最不稳定微观不稳定性为非基态证据最多。初值模拟和本征理论

[1]该名词暂无统一中文翻译，一些文献中译为“闪流”，代表径向的流状结构。streamer与zonal flow相对应，后者代表极向的流状结构。

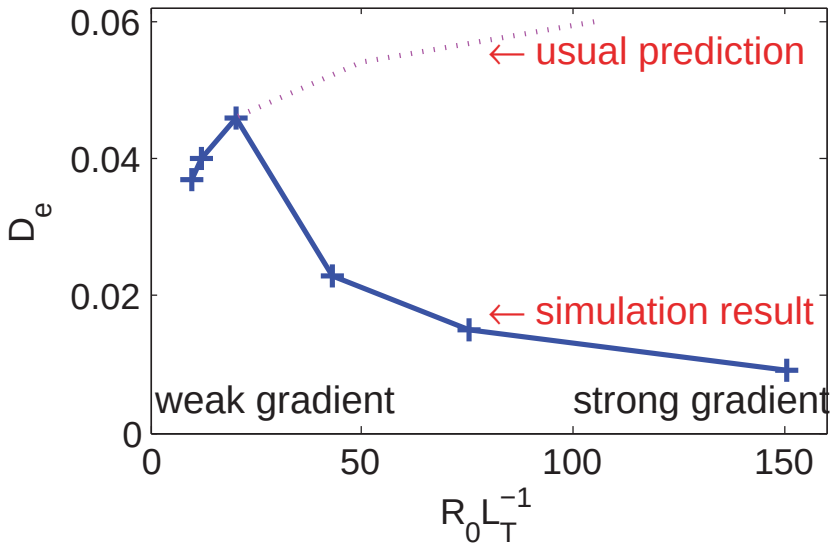

图 7.4　扫描梯度，输运系数存在反转点。

表 7.1　L模弱梯度和H模强梯度的物理完全不同

	新理解(强梯度)	传统理解(弱梯度)
线性	系列本征态，非基态	单个本征态，基态
带状流	不重要	非常重要
模耦合	不重要	重要
$\nabla T\uparrow$	χ_j 或$D_j\downarrow$	χ_j 或$D_j\uparrow$

均证实了临界梯度的存在。并且实验中的频率与模拟中的非基态频率接近，而模拟中弱梯度下的频率只有10-20kHz，远小于实验观测值70-100kHz。第四条目前有初值模拟的支持，也恰恰是实验H模下应该出现的结果，因而可靠性也较高，尽管这里的模拟还只是针对TEM，也只有HL-2A 的参数模拟。第二条带状流在强梯度下不重要也可以进行如下唯象理解：弱梯度下，湍流关联长度较大，带状流打乱了径向结构，使得关联长度减小从而抑制输运；强梯度下，湍流关联长度本来就很小，带状流无法进一步减小径向小结构的大小，从而无法进一步抑制输运，因而带状流不再起明显作用。这里第三条模耦合是否确实不重要，目前的证据稍弱，只有孤立的模拟证据，而且暂时没有好的物理理解，仍然需要更多的研究才能断定。

我们另外注意到在绪论的1.3.1节中提及实验上比L态约束有改善的除了通常说的H模外，还有I模及比H模约束更进一步的先进模式。这种现象如果用1.3.3中提及的分叉或捕食者-猎物模型来解释，则需要不断的修改模型引入新的态。而如果L-H转换的微观机制是多

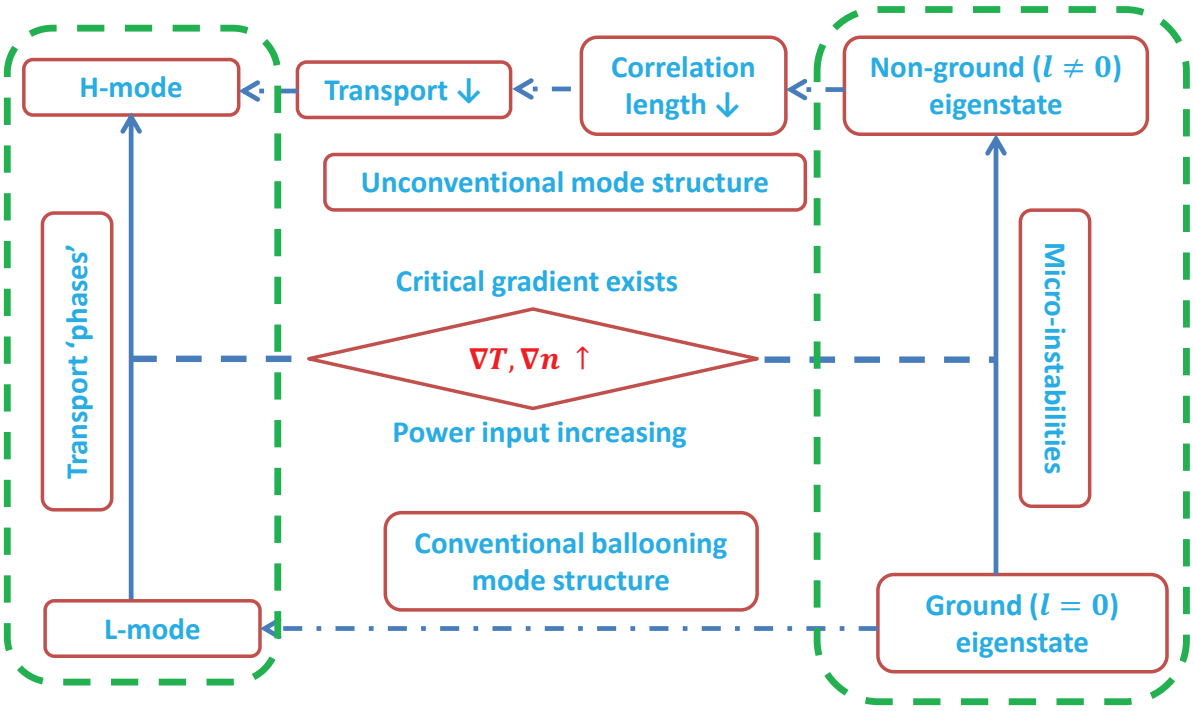

图 7.5　L-H转换可能来源于微观不稳定性本征态基态到非基态的跳变的过程示意图。

本征态，不同梯度最不稳定的模处于不同的本征态，那么导致多种输运准平衡态将是较为自然的。

另外，各种实际实验中存在的其他环向或极向流（除了回旋动理学模拟中自洽的流，如$E \times B$流）或者转动和有限比压未进入本文的讨论中，它们会如何修正这里的结论还有待进一步研究。

为了更清晰的示意我们对实验中L-H可能起源于微观不稳定性的本征态跳变的猜测，我们给出图7.5。总结如下：在外部输入功率较低时，约束的等离子体处于通常的弱梯度区间(L模或L'相')，此时边界微观不稳定性处于基态，模结构为通常的气球模结构，边界湍流输运为通常的类似于堆芯区的湍流输运，梯度越大输运系数越大；随着外部功率的增加，达到一定临界值时，边界温度密度梯度也出现某个临界值，这个值使得边界最不稳定的微观不稳定性从基态变为非基态，此时模结构变为非常规模结构，其关联长度比常规气球模结构下时的关联长度小，从而导致输运相对抑制，输运系数变小，出现外部输运垒，形成台基区；超过临界梯度后，由于向外的输运有稍微的抑制，从而与外部注入功率更容易达到平衡，从而进入H模准稳态(H' 相')。这是我们猜测的H 模的可能微观机理，其线性和非线性证据目前主要是第5 到7章给出的。要完整证明这个猜测，还需要更多的模拟与实验对比，尤其是长时间尺度的模拟与实验对比。

8 边界电磁微观不稳定性

边界电磁微观不稳定主要有气球模、剥离模和微撕裂模，它们主要由电流或压强梯度驱动。由于剥离模对电流的剖面精度要求较高，微撕裂模也较为复杂，目前我们采用的初值模型(GTC代码)尚较难精确处理，本章主要讨论动理学气球模。

8.1 实验和前人理论结果

实验上(这里主要指EAST的实验)边界电磁模也通常分高频支和低频支。低频支一般小于30kHz，模数较低，且通常$n=1$。高频支，频率可到数百kHz，模数也较高。如图8.1显示了EAST托卡马克最近(2014)的一个H模实验结果[23]。除了单纯的低频支和高频支外，在高频部分还出现了多个谐频，相邻分支相差的频率接近低频支的频率。

理论上边界电磁模可以分为两类，一类是压强梯度驱动的动理学气球模，另一类是电流驱动的(剥离模、扭曲模和撕裂模)。前者一般高模数高频率，后者一般低模数低频率。因此图8.1中高频分支可能是KBM，低频分支可能是动理学电流驱动模，而谐频极可能是高频支和低频支的耦合。以上分析，在定性上可以说通，但要完全确认则需要定量的理论和模拟结果去对比。

对边界电磁微观不稳定性的理论和模拟的研究，近几年主要针对动理学气球模展开。由于边界的强梯度，KBM在边界通常具有强不稳定性，它对边界物理起作用已经被普遍接受。除KBM 外，其他电磁模的重要性尚不明确。文献[24;141]认为微撕裂模(MTM)也较重要，如图8.2 显示在一定参数区间MTM 会不稳定；文献[25;30]认为动理学剥离模很重要，图8.3显示了该研究组认为有可能的一种动力学演化过程。

以上理论结果尽管是通过回旋动理学代码定量计算的，但是尚并不能与实验一一对比，除了实验的参数不确定外，代码中对参数也极为敏感，可靠性并不能保证。并且这些结果主要还是线性的分析。因此H模下的电磁微观不稳定性的模拟研究依然只能算处于起步阶段。

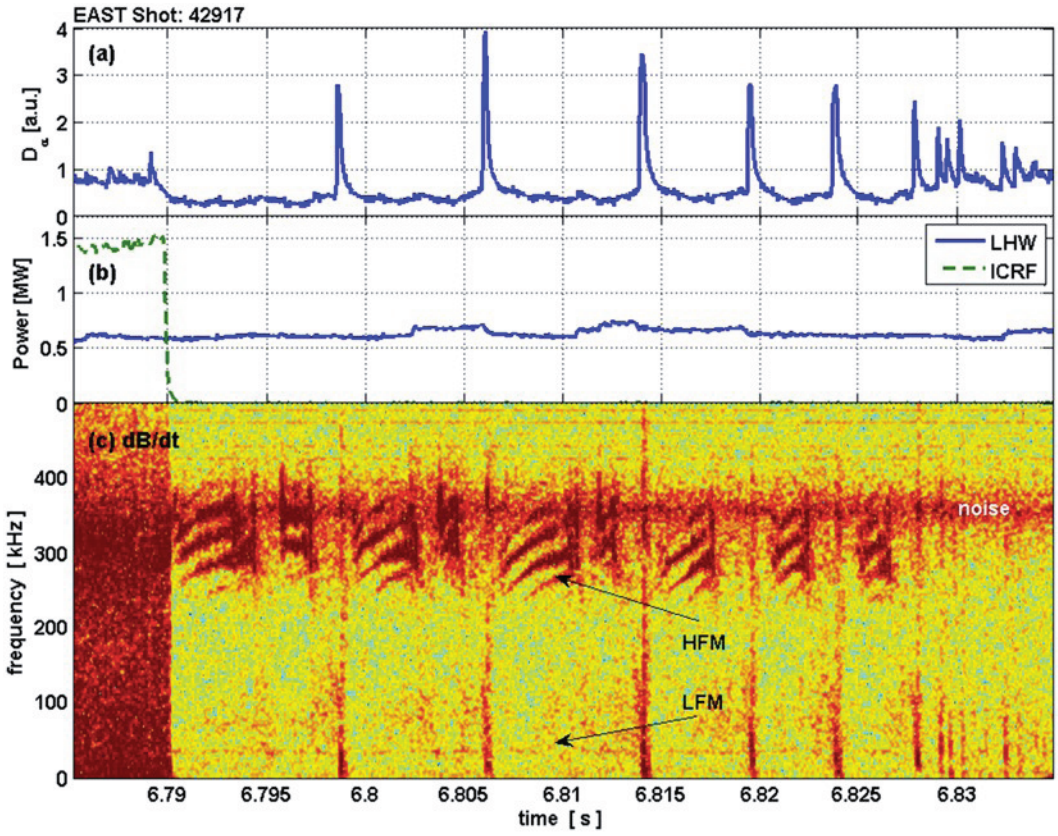

图 8.1　EAST最近的H模实验谱图，高频电磁模中有多个分支(取自文献[23])。

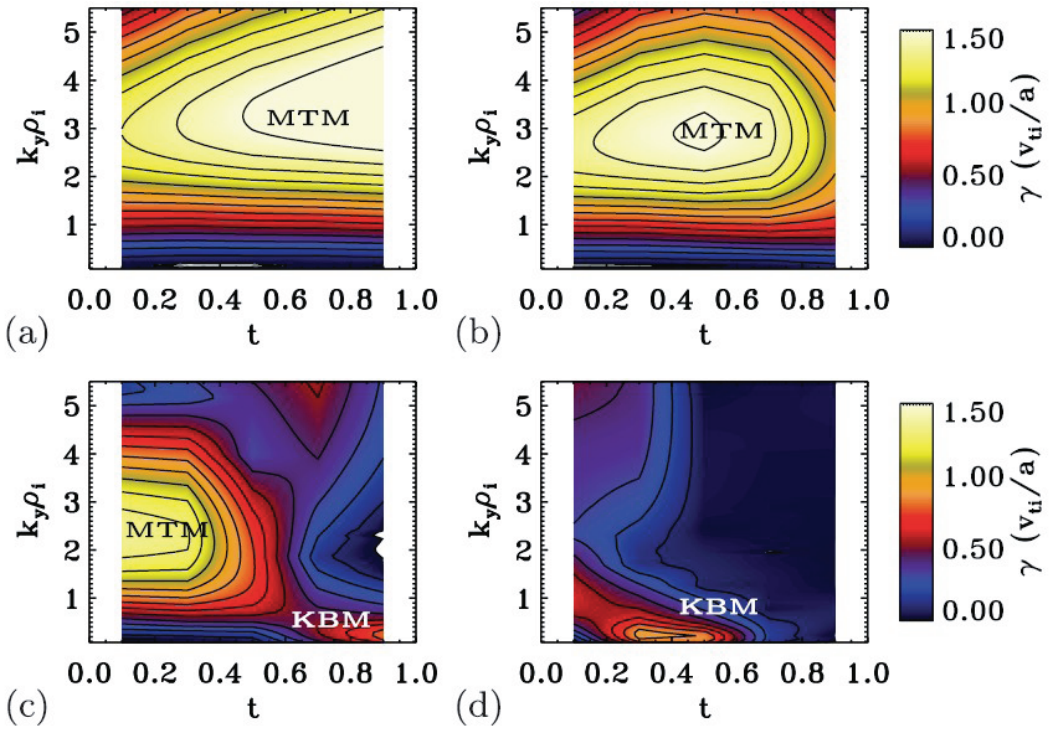

图 8.2　GS2代码的模拟认为MTM和KBM在边界强不稳定，从而起较大作用(取自文献[24])。

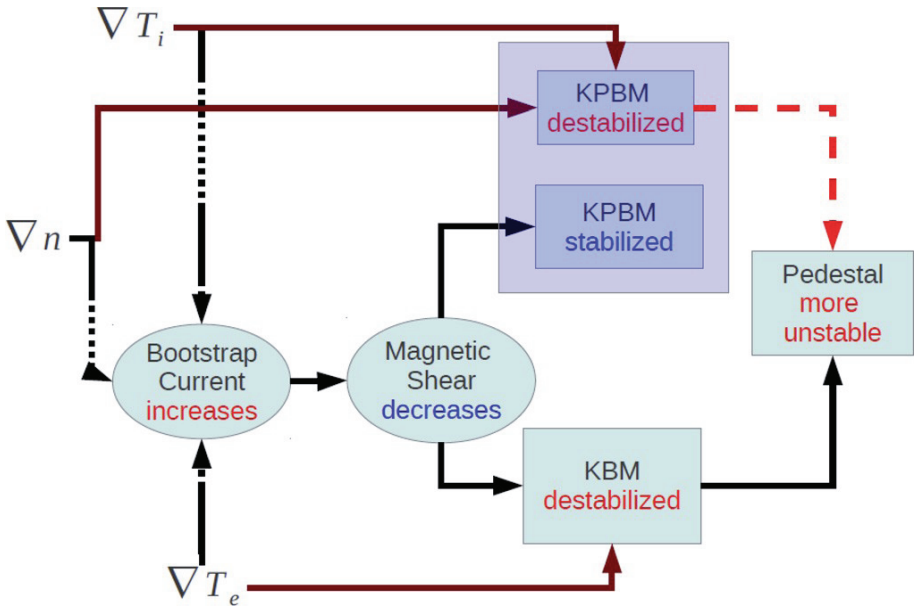

图 8.3　GEM代码的模拟认为KPBM和KBM在边界有关键作用(取自文献[25])。

8.2　线性动理学气球模

8.2.1　平衡的敏感性

使用全局回旋动理学模拟研究动理学气球模(KBM)对理解托卡马克边界物理尤其高约束模阶段来说非常关键。然而，尽管这个方向已经努力了至少十几年，依然无法做到对实验的预测，甚至只是预测实验上观测到的KBM的频率。问题可能来源于多方面，比如理论模型、数值困难等。我们这里指出一个关键点：初始平衡位形的实现，对KBM不稳定性的频率和增长率的计算非常敏感。即使是对于同一局域平衡参数，不同的平衡实现方式会导致线性增长率能差两倍以上。而这一因素对于ITG和TEM并无明显影响。

气球模[113]是一种主要由压强梯度驱动的电磁模，同时被认为是托卡马克高约束模式下最重要的不稳定性之一。H模之所以重要是因为它使得托卡马克的约束变好从而使经济的聚变更可能实现。理想剥离-气球模和动理学气球模也是用来预测H模台基高度和宽度的EPED模型[142]的理论基础。线性和非线性的剥离-气球模在最近已经被一些流体代码进行了较密集的研究，比如本征代码ELITE[143]和初值代码BOUT++[144]。这些研究已经帮助理解了(如，文献[10])不少H模实验中的重要侧面(如，模数)。不过，流体模型缺失许多像波粒子共振和有限拉莫半径(FLR)等动理学物理，而这些动理学物理在实验中H模台基形成过程中可能起关键作用。完整的理解托卡马克边界的电磁不稳定性依然在进展中。特别地基于第一性原理电磁动理学模拟到目前依然没有很好的被确立，尽管已经有十年以上的努力。

对静电托卡马克等离子体，平衡磁场的几何位形对定量研究非线性物理非常重要[145;146]。最近的一些研究发现，不同的回旋动理学代码中忽视环坐标(r,θ_0,ζ_0)与磁面坐标(r_f,θ_f,ζ_f)中极向角的差别，会导致湍流输运的模拟结果出现明显差别[145;146]。对于有限β等离子体，我们通过GTC[80;81]模拟发现电磁模会占主导，全局平衡对线性物理也影响极大从而变得非常重要。半解析的精确到二阶的全局Shafranov位移平衡在GTC中得到了实现[83;147](第4章及附录A)，用来研究磁场平衡对电磁KBM的效应。我们发现，对于同一组局域平衡参数，平衡的具体实现中的细微差别，会导致线性频率和增长率等线性物理极大的差别，更别说非线性物理了。同时局域和全局模拟的结果也非常不同。

我们依然使用低β的平衡模型$\beta\sim\epsilon^2$，具体描述在4.1节。这里再次强调Boozer磁面坐标(r_f,θ_f,ζ_f)与几何坐标(r_s,θ_s,ζ_s)的差别$r=r_s$，$\zeta_f=\zeta_s$及$\theta_f=\theta_s-(\epsilon+\Delta')\sin\theta_s$[111]。在回旋动理学模拟领域中，有三种所谓的$s$-$\alpha$模型曾被使用，现试说明如下：Model-a，最低阶近似$\theta=\theta_s$；Model-b，一阶近似同时不包含Shafranov 位移，$\Delta=0$ 和$\theta=\theta_s-\epsilon\sin\theta_s$；Model-c，$\Delta\neq0$ 和$\theta=\theta_s-(\epsilon+\Delta')\sin\theta_s$。

图8.4显示了扫描β_e得到的GTC的线性频率和增长率，并与其他回旋动理学代码的结果对比。这里用了Cyclone算例的标准参数[17]，即，$s=0.78$，$q=1.4$，$\kappa_T=R_0/L_T=6.9$，$\kappa_n=R_0/L_n=2.2$及$T_i=T_e$，其中$L_n=-d\ln n/dr$和$L_T=-d\ln T/dr$。同时，$k_\theta\rho_i=0.22$，其中$k_\theta=nq/r$，ρ_i为离子拉莫半径。图8.4中GENE、GS2和GYRO的数据是从原始文献[26–28]中数据插值所得。从ITG到TEM到KBM的转换可随β_e增大而清晰可见。GTC (Model-b)电磁[29;81]模拟在$\beta_e\to0$极限下可以回复到GTC (Model-b，ES)静电[80]结果，这就保证了GTC电磁模型可以退化到静电模型。图中各回旋动理学代码中的平衡实现，GYRO的为Model-a，GS2和GENE默认是Model-b，而在GTC代码支持Model-a和Model-b两种平衡实现。如图8.4所示，平衡实现对ITG、TEM及它们间的转换点影响不大，但对KBM支的增长率有明显影响。这里GTC给出的实频与其他代码差不多，但增长率要小，比如对$\beta_e=1.75\%$及使用Model-a平衡磁场的情况，$\gamma^{\mathrm{GYRO}}\simeq1.5\gamma^{\mathrm{GTC}}$。我们注意到，这个差别可以来自平衡剖面的不同，下文将具体讨论。也即，像GYRO那样的回旋动理学代码使用的是局域磁通管(flux-tube)平衡，而GTC使用的是全局平衡。一项用不同的代码进行的DIII-D上H模台基区的线性电磁回旋动理学计算[12]显示，不同代码使用局域平衡的频率和增长率可以相差到50%。我们也注意到回旋动理学代码GEM使用磁通管平衡后，与前面提到的回旋动理学代码如GYRO在ITG和TEM分支得到了一致的结论[128]。

为了进一步辨别平衡实现对线性物理的影响，图8.5[1]显示了更细致的对KBM线性频率ω和增长率γ 随β_e ($k_\theta\rho_i=0.22$)和$k_\theta\rho_i$ ($\beta_e=1.75\%$)变化的扫描。我们发现GTC的KBM模

[1]图中GYRO的数据由E. A. Belli提供。

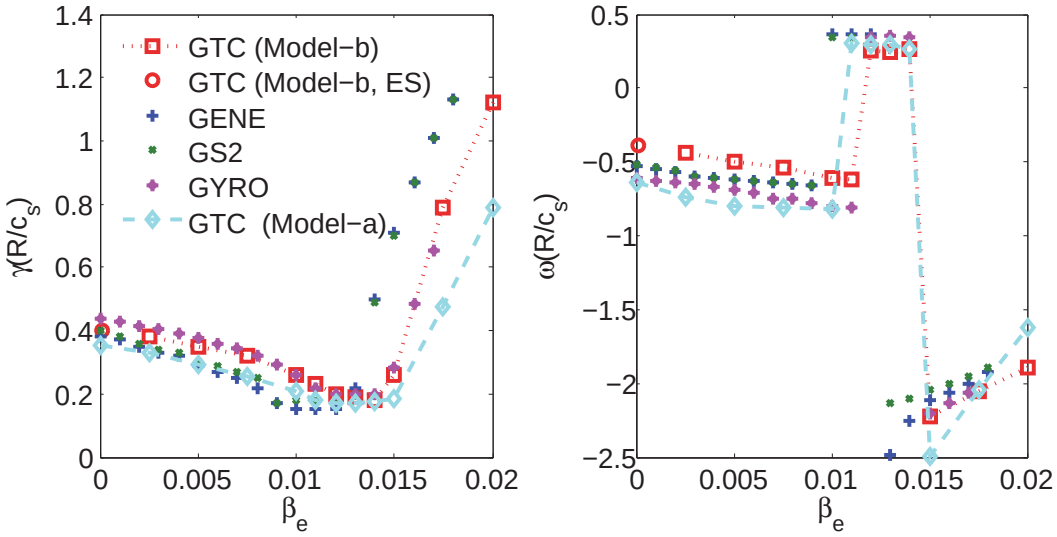

图 8.4 扫描β_e对比GTC与其他回旋动理学代码(GYRO，GENE及GS2)针对不同的平衡场模型。ITG到TEM到KBM的转换可以随β_e的增大而清晰看到。平衡实现对ITG和TEM分支影响并不大，但对KBM分支影响非常大。数据部分来自[26–29]。ES意思是静电模拟。

表 8.1 局域剖面中梯度径向宽度对KBM和ITG的影响

ω	$\Delta r = 0.4$	$\Delta r = 0.3$	$\Delta r = 0.2$	global
KBM	1.67+1.09i	1.77+1.02i	1.90+0.93i	2.06+0.76i
ITG	0.47+0.16i	0.47+0.15i	0.48+0.14i	0.50+0.13i

拟中当全局Shafranov位移加入时，频率和增长率均相对无位移时发生极大的变化：频率和增长率均大幅变小。我们也对比了Shafranov位移对ITG分支的影响。在GTC的平衡中，加入和不加入Shafranov位移，ω和γ的变化均小于5%[147](见后文及表8.1)，从而Shafranov位移对ITG线性物理的影响可忽略。这表明，精确的全局平衡虽然对静电模如ITG/TEM的回旋动理学模拟影响不大，但对回旋动理学KBM模拟的程序验证并对比实验可能极为关键。

为了确认局域平衡对于KBM分支确实不适合与实验对比，我们对比GTC中不同的局域和全局平衡的计算结果。在图8.4&8.5中，GTC使用的是以下全局剖面：$q = 0.82 + 1.1(\psi/\psi_w) + 1.0(\psi/\psi_w)^2$，$n_i = n_e = 1.0 + 0.205\{\tanh[(0.3 - (\psi/\psi_w))/0.4] - 1.0\}$及$T_i = T_e = 1.0 + 0.415\{\tanh[(0.18 - (\psi/\psi_w))/0.4] - 1.0\}$，其中$\psi$是极向磁通，取$\psi_w = \psi(r = a) = 0.0375 B_0 R_0^2$给出$a/R_0 = 0.36$，同时在$r = 0.5a$处(此处也是梯度的峰值位置)的局域参数为Cyclone标准算例的值。为了构造局域平衡剖面，我们使用以下梯度剖面来计算密度和温度剖面：$\kappa_n = 2.22 e^{-[\frac{(r/a-0.5)}{\Delta r}]^6}$及$\kappa_T = 6.92 e^{-[\frac{(r/a-0.5)}{\Delta r}]^6}$，其中$\Delta r$决定局域剖面的

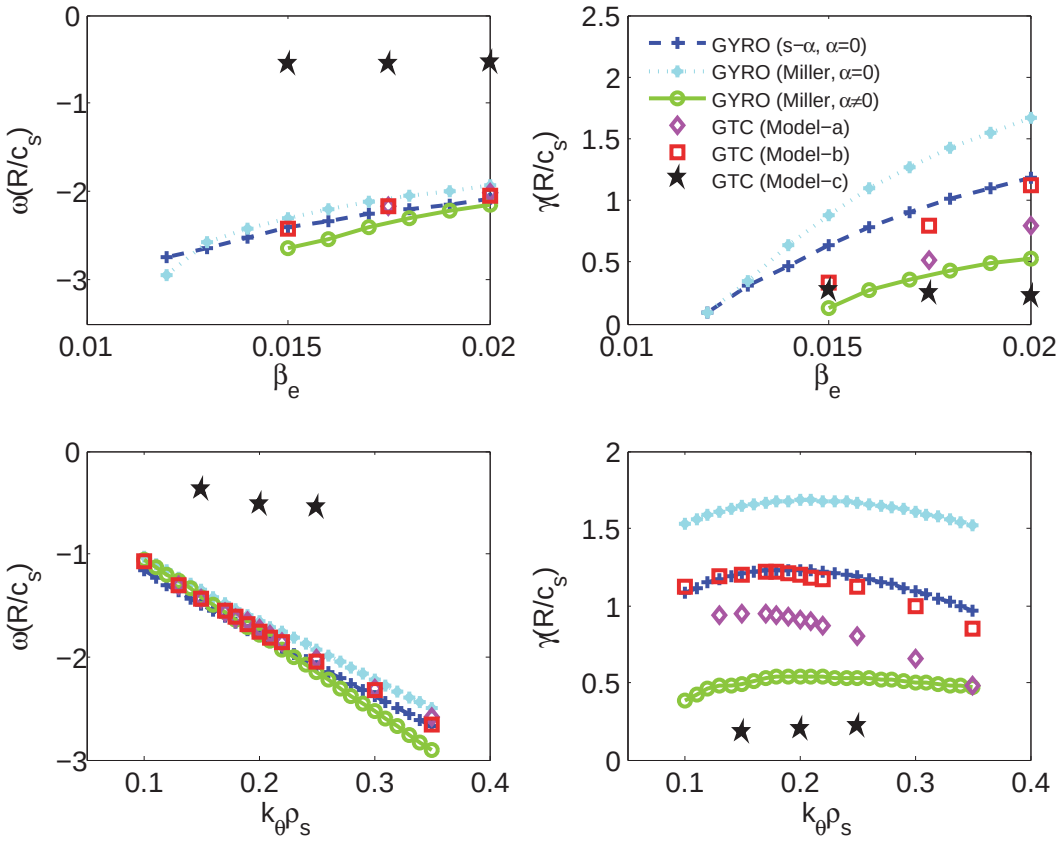

图 **8.5**　**GTC**与**GYRO**的对比，针对不同的平衡实现。**GYRO** (**s-**α，$\alpha = 0$)为**Model-a**；**GYRO** (**Miller**，$\alpha = 0$)为**Model-b**；**GYRO** (**Miller**，$\alpha \neq 0$)为**Model-c**。

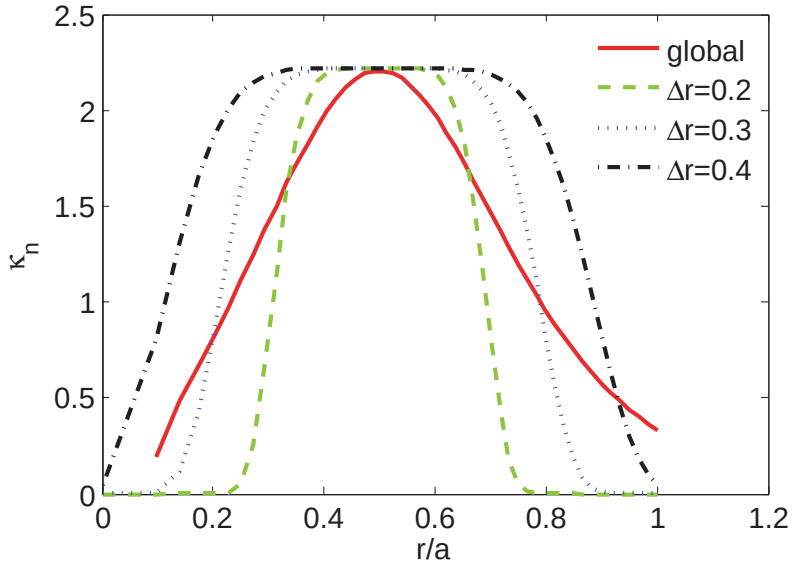

图 **8.6**　**GTC**模拟中使用的局域和全局剖面中的κ_n。

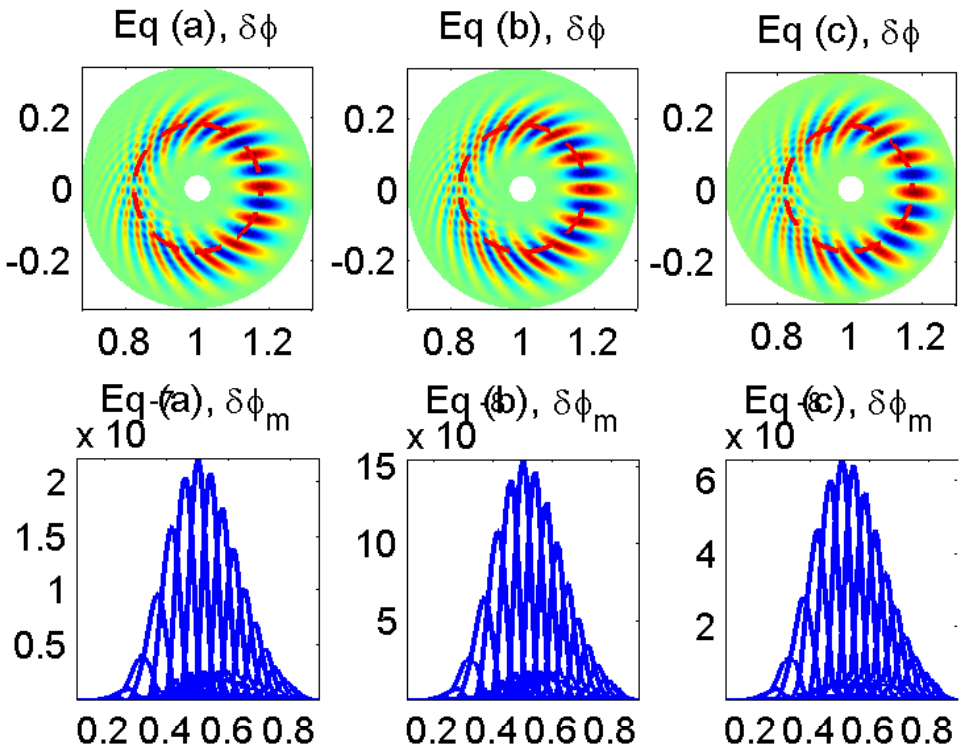

图 8.7　三种平衡下GTC模拟ITG的$\delta\phi$图。

径向宽度。图8.6显示了GTC中用来建模局域平衡的κ_n。静电的ITG和TEM模拟中，线性频率和增长率对Δr不敏感。表8.1显示了使用不同的局域剖面宽度Δr对ITG和KBM的电磁模拟结果的影响，同时与全局剖面结果进行了对比。我们可以看到对于ITG那支，在不同平衡实现方式下频率和增长率相对变化较小，而KBM那支的频率和增长率却对平衡实现敏感的多。为了确保以上差别是源自平衡的不同，尽可能排除其他因素，我们在模拟中使用了绝热电子同时用Model-a 的平衡。在模拟的初始设置中，对ITG和KBM唯一不同是β_e，即$\beta_e^{\mathrm{ITG}} = 0.25\%$而$\beta_e^{\mathrm{KBM}} = 1.75\%$。以上结果证实了KBM在无Shafranov位移时就已经对平衡及全局剖面非常敏感。再综合考虑图8.5和第4章，全局Shafranov位移对KBM线性物理的敏感更大，很容易出现频率和增长率在同一参数不同平衡实现下相差一倍以上。同时这也表明，为了真正定量对比各个回旋动理学代码或者对比H模的实验中的KBM，我们需要用一个精确的全局平衡。

图8.7和表8.2显示ITG对平衡位移不敏感。其中三种平衡为：(a) GTC原来的平衡；(b) GTC修正的平衡($\Delta = 0$)；(c) GTC修正的带位移的平衡($\Delta \neq 0$)。(a)和(b)的差别见附录A.3，其中(a)可能导致磁面在二阶下非圆。

表 8.2　GTC不同平衡实现对ITG不敏感

	(a) old	(b) new ($\Delta = 0$)	(c) new ($\Delta \neq 0$)
ω_r	0.408	0.403	0.403
γ	0.214	0.208	0.202

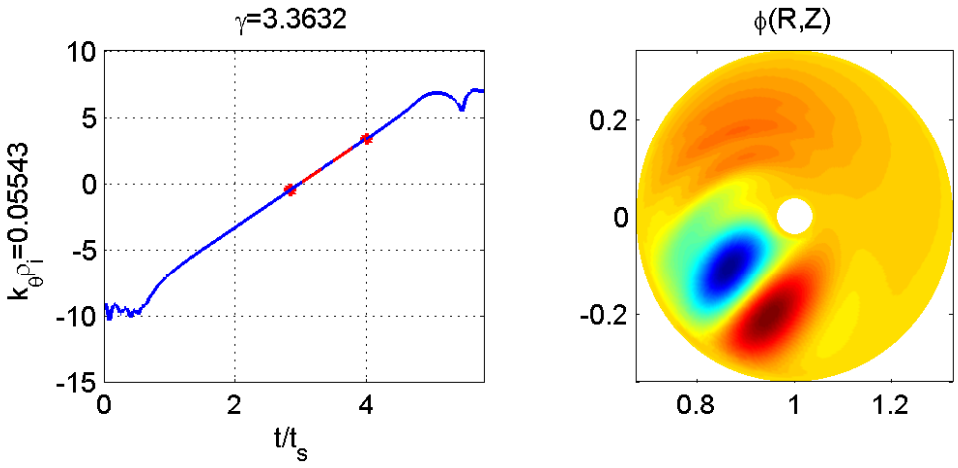

图 8.8　GTC模拟KBM，$k_\theta\rho_i < 0.1$ ($n = 7$)时出现增长率近十倍的跳变，模结构也显著改变。

8.2.2　数值或模型的困难

在上一节，最小的$k_\theta\rho_i$只到0.1。我们发现在GTC的模拟中，$k_\theta\rho_i < 0.1$时，出现增长率的跳变，并且模结构中很强的低m模。图8.8给出了一个$n = 7$ ($k_\theta\rho_i < 0.06$)的模拟结果，可以看到增长率增加了近十倍(实频也增加近十倍)，并且模结构已经完全改变，以低m 模为主，更像是数值发散。GEM 的一个模拟[30] 中，如图8.9，在低n，同时也是低$k_\theta\rho_i$，也出现频率和增长率的跳变，并被解释为动理学剥离模。

图8.10与图8.8所有设置都相同，只是在模拟中人为的进一步滤掉了所有$m < 5$的模，可以看到，增长率和模结构又恢复正常。这里的$k_\theta\rho_i$跳变，可以通过多种方式得到：1. 减小环向模数n；2. 降低温度从而降低ρ_i；3. 改变大半径，从而改变归一化的长度。多种方式的跳变均发生在$k_\theta\rho_i = 0.095 \pm 0.005$附近，表明$k_\theta\rho_i$是关键量，而非单纯的$n$等其他量。这个跳变，加密网格和增加粒子数也无法避免。从这些角度看，这个跳变又像是物理的而非数值的。这使得这个问题变得更复杂和难于理解。其他代码局域模型中，尽管计算中可能数值正常，但是否正确代表KBM 的物理还很难说，因为通常默认$|m - nq| \simeq 0$。GEM 的结果[30]，尽管已经过去了三年，目前也还未在任何其他局域回旋动理学代码中重现。

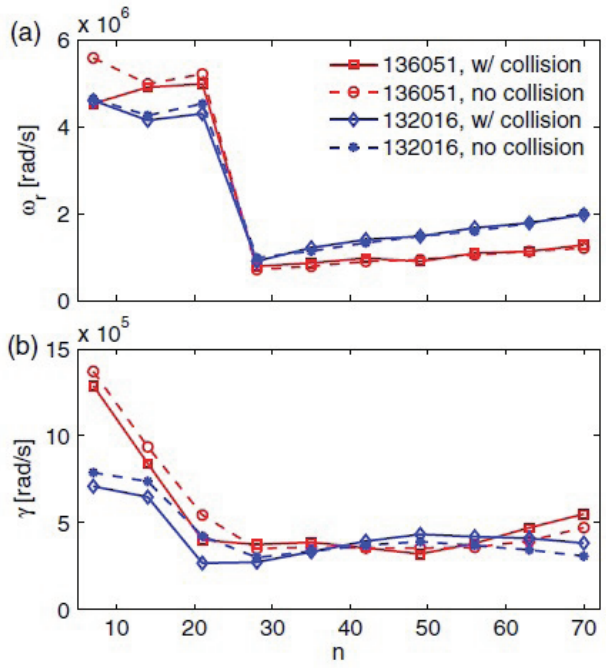

FIG. 2 (color online). The results of (a) linear real frequency ω_r and (b) growth rate γ for the two discharges with original q profiles. The effect of collisions is also shown.

图 **8.9**　**GEM**模拟中，低n处，也出现增长率和频率跳变，被解释为动理学剥离模[30]。

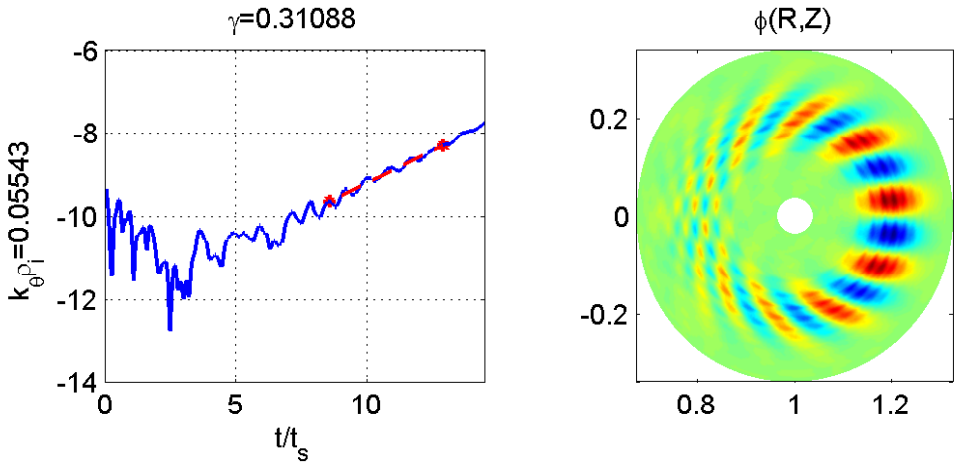

图 **8.10**　**GTC**模拟**KBM**，$k_\theta\rho_i < 0.1$ $(n = 7)$时，滤掉$m < 5$的模，增长率恢复到原来值附近。

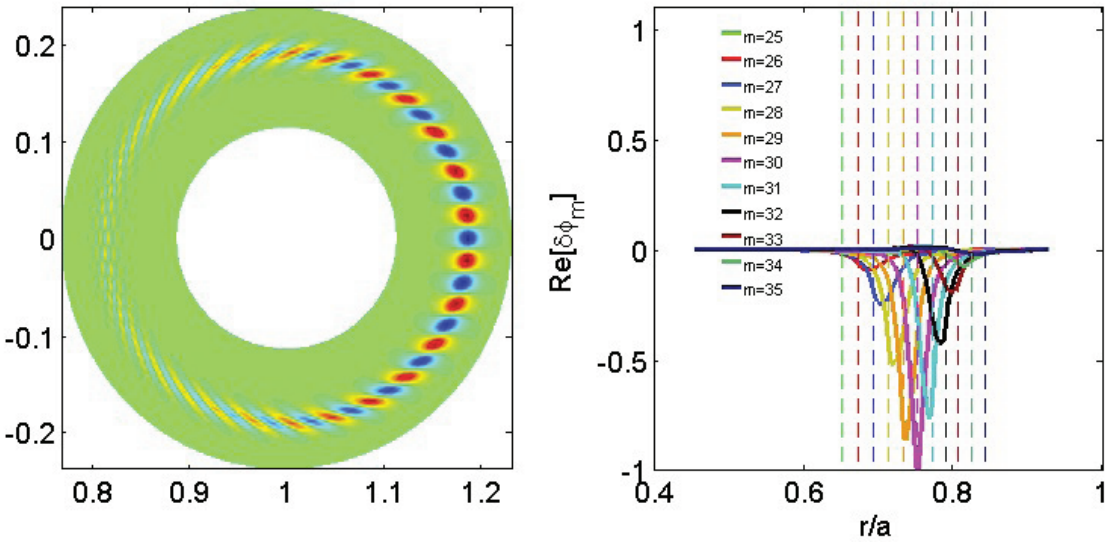

图 **8.11**　**GTC**模拟强梯度线性**IBM**，模结构正常，$|m - nq| \simeq 0$。

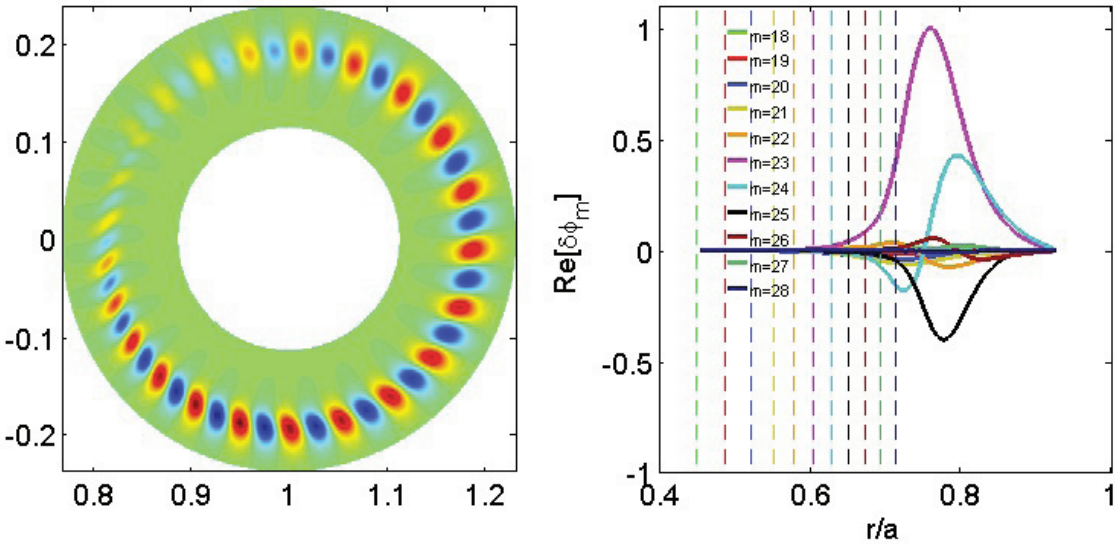

图 **8.12**　**GTC**模拟强梯度线性**KBM**，模结构有形变，$|m - nq| \gg 1$。

另外，GTC模拟强梯度的电磁模，$m \neq nq$也在模拟结果中常见。如图8.12和图8.11分别是同一参数($n = 15$，$RL_p^{-1} \sim 30$) 模拟IBM 和KBM 的结果，IBM的结果模结构正常，KBM的模结构扭曲且$|m - nq| \gg 1$。当继续加大梯度时，尤其以HL-2A边界H模的梯度参数模拟时，模结构的形变更大($nq \sim 30$时，$m < 20$)，频率也远高于(十倍以上[2])实验中的(图5.1)高频电磁模，结果是否合理尚不清楚。第6章的静电TEM，尽管也$|m - nq| \gg 1$，但并未出现这里KBM的数值问题，模拟参数在回旋动理学适用范围内，且计算的频率与实验接近，可认为是正常的。

8.3 非线性气球模

目前仅仅在单n的特定情况成功的得到非线性气球模饱和结果，其他大部分情况遇到数值发散从而模拟中断。图8.13显示了少数的非线性演化正常的动理学气球模模拟结果，其中使用了绝热电子，同时β足够大，单环向模数n。如果这个结果正确，那么可以看到两个新特性：1. 非线性饱和时，初期可以出现一段比线性增长更快的非线性增长阶段；2. 非线性后期，模结构不仅没有更乱，反而变得更像线性结果。第一点，有气球模非线性理论有类似推论[148]；第二点，可能能解释实验中ELM 中的非线性丝状结构。但是我们尚不能证实这组模拟结果的可靠性。

GTC的电磁模型曾经成功的模拟了非线性BAE[149;150]。这表明GTC中的电磁模型以及使用的数值方法有其正确性。但是我们注意到BAE的模拟中，Zhang et al[149;150]只保留了单环向模数n以及$m \simeq nq$ 附近几个极向模数，且模拟用的温度也较高，这就不会碰到前述$k_\theta \rho_i < 0.1$ 的数值问题。但要正常计算气球模，则必须保留尽可能多的m，而且考察湍流输运则所有的n也应该保留。这就没法像处理AE那样滤波。另外，在Z. X. Wang (2014)[151]的博士论文中讨论了GTC 部分模型和数值困难。

作为总结，电磁模拟动理学气球模依然有极大的挑战性，不管是线性还是非线性。部分其他代码(如GEM)得到的少量的正常的模拟结果也还无法被其他代码证实。这些挑战包括物理模型的，也包括数值算法的，弄清和解决它们是值得进一步努力的。

[2]实验中量到的频率约200kHz，环向模数n约6-14，多普勒频移近似正比于n，以$n = 1$导致的多普勒频移为10kHz计算，总多普勒频移也只100kHz左右，不会导致频率差近十倍（即2MHz）。

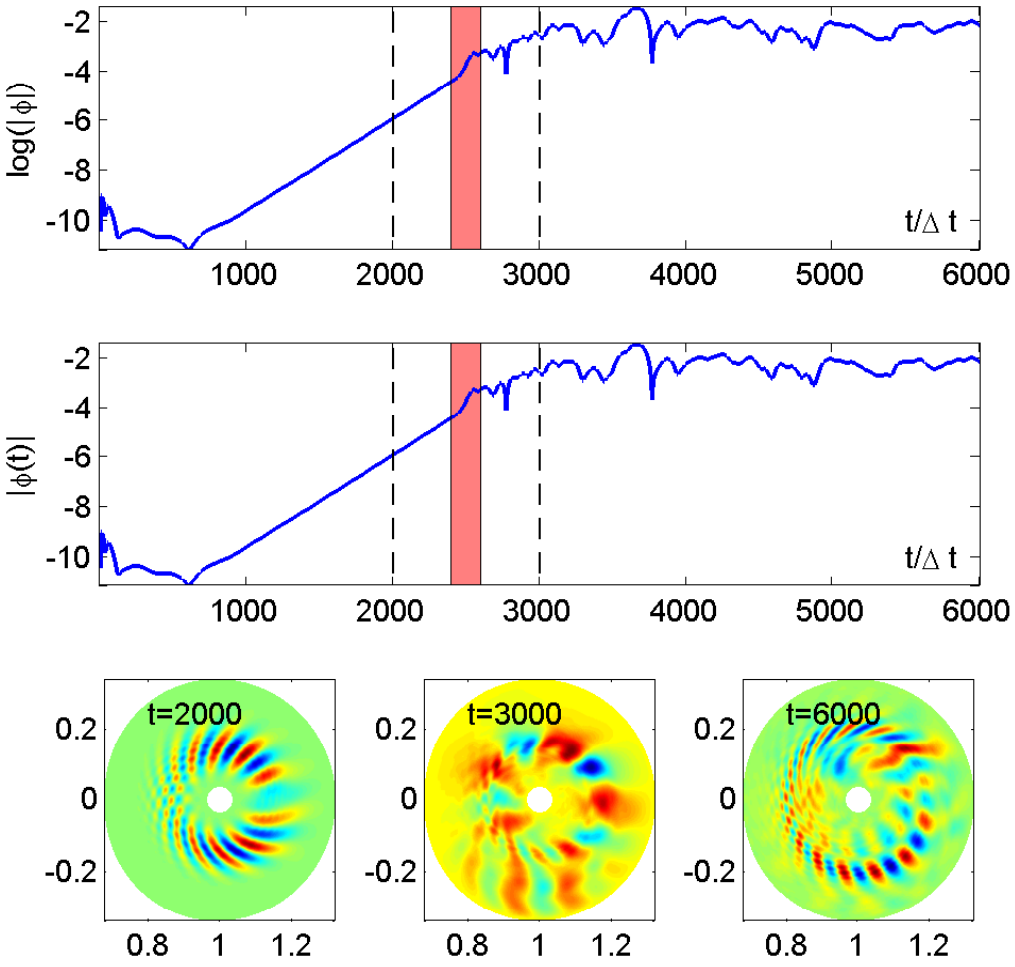

图 **8.13**　**GTC**模拟非线性**KBM**，其中下方的三张截面图为$\delta A_{\parallel}(R,Z)$。

9 总结和展望

本论文主要研究托卡马克边界微观不稳定性及湍流输运，尤其H模强梯度下的相关物理。

9.1 总结

本论文完成的主要工作总结如下：

1. 系统的推导了Shafranov位移圆磁面托卡马克位形下理想磁流体模型中的全局本征模方程，并发展了对应的本征代码AMC。该代码阿尔芬本征模部分已经成功的应用于理论和实验研究[123;126;127]。其气球模部分，与局域s-α模型和GTC的初值模拟三者结合，考察了平衡对理想气球模的影响。

2. 回旋动理学模拟了HL-2A托卡马克近期H模下边界的静电微观不稳定性，辨认出实验上观察到的为捕获电子模，得到了与实验接近的频率和模数。我们发现H模下的微观不稳定性的线性和非线性物理与L模下的线性和非线性物理均有不同。线性条件下，频率分支和模结构与L模不同，表明系统中至少存在两支TEM分支。非线性的极向谱逆坍缩也与传统L模下认为的多模耦合过程不同，发现模拟中H模下的谱逆坍缩更像是单模本身的非线性演化导致的。

3. 给出了非传统气球模结构的普遍理论，并且证实了它们对应于非基态的本征模。在弱梯度L模下，最不稳定的为基态；强梯度H模下，为非基态。而且，临界跳变梯度恰好与实验中L-H转换的梯度在同一范围。这解释了前面HL-2A模拟中的线性结果。同时第一次指出，L-H转换可能来源于微观不稳定性的本征态跳变，而非单纯的相变。

4. 非线性的回旋动理学模拟第一次发现了强梯度驱动下湍流输运出现反转点，超过临界梯度后梯度越大输运系数越小。同时发现强梯度下带状流并非主要的湍流饱和机制，并不像弱梯度下那样明显抑制输运。

5. 研究了电磁性回旋动理学模拟，尤其动理学气球模模拟。我们发现全局平衡的数值实现对KBM的线性物理有显著影响，甚至平衡二阶量的不同可以导致频率和增长率差一倍，这个影响远超过其对TEM和ITG的影响。

本论文发现了H模下湍流输运及L-H转换与微观不稳定性的非基态本征态及本征态跳变有极大相关性，恰好均存在临界梯度，并且实验的临界梯度与这里理论和模拟的临界梯度相近。这个相关性之间是否有因果性尚需更深入的实验和理论证据，尤其是定量的证据。再就是实验上还有其他因素的影响，比如加热加料、等离子体旋转(rotation)、边界条件，等。这些额外的因素可能对当前的理解产生重要的修正。

9.2 展望

基于前面已经完成的工作，我们列出部分此后值得进一步深究的方向：

1. 对非常规气球模及其对L-H转换的影响，目前的结果主要还是基于静电线性模拟和本征模型理论。定量的本征理论以及电磁模型是需要进一步考虑的。局域气球模变换的理论能否完全得到与这里全局模拟定量一致的频率和增长率还很难断定。在弱梯度下，局域代码与全局代码一般均能符合很好[136]，包括HD7代码与GTC的对比[29]。本文作者基于HD7 代码的计算，在$\theta_k = 0$ 时，定性得到了本论文中TEM的多个本征态，$k_\theta \rho_i$ 趋势相近，频率和增长率量级也接近，但定量还不能一致。注意到强梯度下时，模结构已经在多处与常规气球模不同，包括$\theta_k \neq 0$、$|m - nq| \gg 1$、径向包络$A(r)$ 宽度极窄等，这些对局域理论的各处近似提出了挑战。如果局域理论的近似中无法完全避开这些困难，那么定量理论可能必须基于全局模型，此时解析解将更为繁琐，从而可能也只能使用数值解。

2. 非线性模拟证实非常规气球模结构确实能导致输运改善。但是如何更深入的理解这一结果，以及如何发展更定量对应的理论，是依然具有挑战性的。H模下湍流输运理论应该考虑强梯度驱动下非常规的模结构。

3. 动理学气球模的模拟，依然存在各种困难。有可能是数值的，也可能是模型的，需要进一步查明原因以及找出解决方案。

附录 A　磁面坐标

托卡马克中平衡态的等离子体的磁场通常形成磁面，磁力线与磁面重合，许多物理量(如温度、密度)也通常是磁面的函数。因而通过构造磁面坐标有效的利用这一对称性有助于简化计算。这里细节描述第4章中的带偏移的同心圆磁面位形。

A.1　度规张量与雅可比

欧几里得坐标(Euclidean coordinate) $\mathbf{r}(x,y,z)$ 用任意其他曲线坐标(u^1,u^2,u^3) 可以表示为

$$x=x(u^1,u^2,u^3),\quad y=y(u^1,u^2,u^3),\quad z=z(u^1,u^2,u^3), \tag{A.1}$$

或者反过来

$$u^1=u^1(x,y,z),\quad u^2=u^2(x,y,z),\quad u^3=u^3(x,y,z). \tag{A.2}$$

协变(covariant)基矢

$$\mathbf{e}_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^1},\quad \mathbf{e}_2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^2},\quad \mathbf{e}_3=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^3}, \tag{A.3}$$

逆变(contravariant)基矢

$$\mathbf{e}^1=\nabla u^1,\quad \mathbf{e}^2=\nabla u^2,\quad \mathbf{e}^3=\nabla u^3, \tag{A.4}$$

有如下关系

$$\mathbf{e}_i=\frac{\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k}{\mathbf{e}^i\cdot(\mathbf{e}^j\times\mathbf{e}^k)},\quad \mathbf{e}^i=\frac{\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)}. \tag{A.5}$$

协变度规张量(metric tensor)

$$g_{ij}=g_{ji}:=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3\end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

逆变张量

$$g^{ij}=g^{ji}:=\begin{pmatrix}\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}^3\\ \mathbf{e}^2\cdot\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2\cdot\mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^2\cdot\mathbf{e}^3\\ \mathbf{e}^3\cdot\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^3\cdot\mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3\cdot\mathbf{e}^3\end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

和雅可比(Jacobian)

$$\mathcal{J} = |\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)| = \sqrt{|g_{ij}|}, \tag{A.8}$$

或雅可比的逆(inverse Jacobian)

$$\mathcal{J}^{-1} = |\mathbf{e}^i \cdot (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k)| = \sqrt{|g^{ij}|}. \tag{A.9}$$

协变与逆变基的变换为$\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j$ 及$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j$。

对于轴对称坐标(ψ, θ, ϕ)，其中$\nabla\phi = 1/R\hat{\phi}$，变换关系为(也可参见文献[152]第五章)

$$\begin{pmatrix} \nabla\psi \\ \nabla\theta \\ \nabla\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\nabla\psi|^2 & \nabla\psi\cdot\nabla\theta & 0 \\ \nabla\theta\cdot\nabla\psi & |\nabla\theta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\theta\times\nabla\phi\mathcal{J} \\ \nabla\phi\times\nabla\psi\mathcal{J} \\ \nabla\psi\times\nabla\theta\mathcal{J} \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

及

$$\begin{pmatrix} \nabla\theta\times\nabla\phi\mathcal{J} \\ \nabla\phi\times\nabla\psi\mathcal{J} \\ \nabla\psi\times\nabla\theta\mathcal{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\nabla\theta|^2\mathcal{J}^2/R^2 & -\nabla\theta\cdot\nabla\psi\mathcal{J}^2/R^2 & 0 \\ -\nabla\psi\cdot\nabla\theta\mathcal{J}^2/R^2 & |\nabla\psi|^2\mathcal{J}^2/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\psi \\ \nabla\theta \\ \nabla\phi \end{pmatrix}, \tag{A.11}$$

同时也给出

$$|\nabla\psi|^2|\nabla\theta|^2 - (\nabla\theta\cdot\nabla\psi)^2 = \frac{R^2}{\mathcal{J}}. \tag{A.12}$$

A.2 磁面坐标

对于磁力线为直线的磁面坐标(straight field line flux coordinates)[153]：(1) 选择$\nu(\psi,\theta)$和$\zeta = \phi - \nu$ 使得$q \equiv \mathbf{B}\cdot\nabla\zeta/\mathbf{B}\cdot\nabla\theta = q(\psi)$[1]，其中$r = r(\psi)$是一个类似径向的磁面坐标；(2) 额外的自由度来自选取θ使得满足特定雅可比$\mathcal{J} = [\nabla\zeta\cdot(\nabla\psi\times\nabla\theta)]^{-1}$。例子有：Hamada坐标$\mathcal{J} = \mathcal{J}_H(\psi)$ 和Boozer坐标$\mathcal{J} = \hat{\mathcal{J}}_B(\psi)/B^2$。

另一种形式的Boozer坐标为

$$\mathbf{B} = g(\psi)\nabla\zeta + I(\psi)\nabla\theta + \delta(\psi,\theta)\nabla\psi. \tag{A.13}$$

注意到$\nabla\phi = \hat{\phi}/R$及使用$\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta = \mathbf{B}\cdot\nabla\phi - \partial_\theta\nu\mathbf{B}\cdot\nabla\theta$，$\mathbf{B}\cdot\nabla\phi = g/R^2$和$\mathbf{B}\cdot\nabla\theta = 1/(\mathcal{J}q)$，

$$\frac{\partial\nu}{\partial\theta} = \frac{gq\mathcal{J}}{R^2} - q. \tag{A.14}$$

[1]注：对非磁面坐标，q也有使用平均定义为$q(\psi) \equiv \langle\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta/\mathbf{B}\cdot\nabla\theta\rangle_\theta$。

注意到解$\nu(\psi,\theta)$可以包含任意关于ψ函数，同时(ψ,θ,ϕ)系统中的雅可比与(ψ,θ,ζ)系统中的相同，$\mathcal{J}^{-1}=\nabla\zeta\cdot(\nabla\psi\times\nabla\theta)=\nabla\phi\cdot(\nabla\psi\times\nabla\theta)$。

混合表象$\mathbf{B}$ (B_t协变，B_p逆变)

$$\mathbf{B}=g(\psi)\nabla\zeta+\nabla\zeta\times\nabla\psi_p, \tag{A.15}$$

通常比普适(逆变)磁通表象更方便

$$\mathbf{B}=\nabla\psi\times\nabla\theta+\nabla\zeta\times\nabla\psi_p, \tag{A.16}$$

或Clebsch表象

$$\mathbf{B}=\nabla\alpha(\psi,\theta,\zeta)\times\nabla\psi=\nabla(\zeta-q\theta)\times\nabla\psi, \tag{A.17}$$

其中$\psi=\psi_t=\Psi_t/2\pi$和$\psi_p=\Psi_p/2\pi$ 分别约环向和极向磁通相关。

使用(A.11)，我们可以把(A.15)转换为协变形式

$$\mathbf{B}=g(\psi)\nabla\zeta+\Big(\psi_p'\frac{\mathcal{J}}{R^2}|\nabla\psi|^2\Big)\nabla\theta+\Big(-\psi_p'\frac{\mathcal{J}}{R^2}\nabla\psi\cdot\nabla\theta\Big)\nabla\psi, \tag{A.18}$$

其中$\psi_p'=d\psi_p/d\psi=1/q(\psi)$及$\mathcal{J}=[\nabla\zeta\cdot(\nabla\psi_p\times\nabla\theta)]^{-1}$。

使用(A.13)和(A.16)，在Boozer坐标中

$$B^2=\mathbf{B}_i\cdot\mathbf{B}^i=g(\psi)\mathcal{J}^{-1}+\frac{I(\psi)}{q(\psi)}\mathcal{J}^{-1}, \tag{A.19}$$

即，$\mathcal{J}_B=[g(\psi)+I(\psi)/q(\psi)]/B^2$。

普适上，我们可以定义新的磁面坐标，使用(文献[154]的第6章)

$$\theta_F=\theta_f+\frac{d\psi_p}{dr_f}G(r_f,\theta_f,\zeta_f),\quad \zeta_F=\zeta_f+\frac{d\psi_t}{dr_f}G(r_f,\theta_f,\zeta_f). \tag{A.20}$$

这里我们主要对下面两种磁面坐标感兴趣：

$$\theta_f=\theta+\frac{d\psi_p}{dr}G(r,\theta,\zeta),\quad \zeta_f=\zeta, \tag{A.21}$$

和

$$\theta_f=\theta,\quad \zeta_f=\zeta-\frac{d\psi_t}{dr}G(r,\theta,\zeta). \tag{A.22}$$

A.2.1　Shafranov坐标中的形式

Grad-Shafranov方程中的表达式[103]

$$\nabla r=\frac{\cos\theta}{1-\Delta'\cos\theta}\hat{R}+\frac{\sin\theta}{1-\Delta'\cos\theta}\hat{Z}, \tag{A.23}$$

和

$$\nabla\theta = -\frac{\sin\theta}{r(1-\Delta'\cos\theta)}\hat{R} + \frac{(\cos\theta-\Delta')}{r(1-\Delta'\cos\theta)}\hat{Z}, \tag{A.24}$$

在后续将用到。

忽略二阶ϵ^2，使用(A.15)，对环向场[109]

$$B_t(r,\theta) = \frac{g}{R} = B_{t0}(r)(1-r\cos\theta) \simeq 1 - r\cos\theta, \tag{A.25}$$

其中$B_{t0} = I/R_0 \simeq 1$。对极向场

$$B_p = \frac{r}{q}|\nabla\phi\times\nabla r| = \frac{r}{qR(1-\Delta'\cos\theta)} \simeq \frac{r}{q}[1-(r-\Delta')\cos\theta], \tag{A.26}$$

我们可以看到q并不能测度局域的磁力线角(local field line pitch)

$$\frac{\mathbf{B}\cdot\nabla\phi}{\mathbf{B}\cdot\nabla\theta} = q[1-(r+\Delta')\cos\theta], \tag{A.27}$$

随θ变化。因此，Shafranov坐标不是磁面坐标[2]。

给定磁面坐标$\theta_f = \theta + K(r,\theta)$及保持$\zeta_f = \zeta$和$r_f = r$，我们有

$$\frac{\mathbf{B}\cdot\nabla\phi}{\mathbf{B}\cdot\nabla\theta_f} = \frac{\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta}{\mathbf{B}\cdot\nabla\theta}\frac{1}{1+\partial_\theta K} = \frac{q}{1+\partial_\theta K}[1-(r+\Delta')\cos\theta] = q, \tag{A.28}$$

给出

$$\partial_\theta K = -(r+\Delta')\cos\theta, \tag{A.29}$$

即，

$$\theta_f = \theta - (r+\Delta')\sin\theta. \tag{A.30}$$

图4.4显示了Shafranov坐标[3]和磁面坐标的差别。为了画这张图，我们需要$\theta(\theta_f)$的关系式，它并不显式，而不是(A.30)中显式的$\theta_f(\theta)$。我们通过一维插值而不用求逆函数的方法计算上述非显式的关系式。不过，由于$(r+\Delta')\sim O(\epsilon)$，我们也可以使用如下近似

$$\theta = \theta_f + (r+\Delta')\sin\theta_f + O(\epsilon^2). \tag{A.31}$$

使用(A.20)-(A.22)，另一种磁面坐标的选择是保持$\theta_f = \theta$和$r_f = r$，但$\zeta_f = \zeta - \nu(r,\theta)$，其中

$$\nu = -\Big(-K\frac{d_r\psi_p}{d_r\psi_t}\Big) = -q(r+\Delta')\sin\theta. \tag{A.32}$$

我们也可通过(A.14)得到这个结果。

[2]这对$\Delta(r)=0$的同心圆情况也成立!

[3]此时也是等弧长坐标(equal arc coordinate)。

A.2.2　Boozer坐标中的形式

注意(A.23)，(A.24)和$\nabla\psi_p = \nabla\psi/q = r\nabla r/q$，类似于(A.13)，使用(A.18)重写(A.15) 为协变表象，

$$\mathbf{B} = g(\psi)\nabla\phi + \frac{r^2}{qR(1-\Delta'\cos\theta)}\nabla\theta + \frac{\Delta'\sin\theta}{qR(1-\Delta'\cos\theta)}\nabla\psi. \tag{A.33}$$

注意$q(r) = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi}{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_b}$，及使用[4]

$$\frac{\partial\theta_b}{\partial\theta} = \frac{1}{R(1-\Delta'\cos\theta)}(R^2|r\nabla\theta_b|^2) \simeq \frac{1}{R(1+\Delta'\cos\theta)} \tag{A.34}$$

即，

$$\theta_b = \theta - (r+\Delta')\sin\theta, \tag{A.35}$$

其中$|r\nabla\theta_b|^2 = 1 - 2(r+\Delta')\cos\theta$，我们可以变换(A.33)到Boozer形式

$$\mathbf{B} = \underbrace{g(\psi)\nabla\phi}_{O(1)} + \underbrace{\frac{r^2}{q}\nabla\theta_b}_{O(\epsilon)} + \underbrace{\frac{\Delta'\sin\theta}{q}\nabla\psi}_{O(\epsilon^2)}, \tag{A.36}$$

这给出$I = r^2/q$。由于$\delta(\psi,\theta_b)$项为$O(\epsilon^2)$，且较复杂，应用中我们可以把它置零，即，近似用$\delta = 0$。对g，我们可以使用$g = 1$或者从平衡方程的解[103;147]计算

$$g = 1 + g_2 = 1 - p(r) - \int_a^r \frac{1}{q}(\frac{r^2}{q})'dr. \tag{A.37}$$

估计g_2，使用$q = 2$，$a = 0.3$，$p = 0.05$，得到$|g_2| \simeq |-0.05 + 0.3^2/4| \simeq 0.03 \ll 1$，确实非常小。

我们可发现Boozer坐标(A.35)与(A.30)相同。

雅可比

$$\mathcal{J} = [\nabla\phi\cdot(\nabla\psi\times\nabla\theta_b)]^{-1} = [r\nabla\phi\cdot(\nabla r\times\nabla\theta_b)]^{-1} = \frac{R(1-\Delta'\cos\theta)}{1-(r+\Delta')\cos\theta} \simeq R^2 \simeq 1/B^2. \tag{A.38}$$

Boozer坐标在托卡马克粒子导心轨道的推进中较为方便[99;103]，但也有较明显的缺点，比如θ_f网格在外侧($\theta_f \simeq 0$)处过于稀疏(图4.4)。

A.2.3　Hamada坐标中的形式

我们不作细推导直接写出结果

$$\theta_h = \theta + (r-\Delta')\sin\theta, \quad \zeta_h = \phi + 2qr\sin\theta, \tag{A.39}$$

[4]注意：变换$\frac{\partial\theta_b}{\partial\theta} = \frac{1}{R(1-\Delta'\cos\theta)}$，得出$\theta_b = \theta - (r-\Delta')\sin\theta$，是不正确的。

其中雅可比

$$\mathcal{J} = [\nabla\zeta_h \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta_h)]^{-1} \simeq 1. \tag{A.40}$$

Hamada坐标的主要优势在于雅可比较为简单。

A.3 零位移情况

零位移的同心圆几何较简单从而在测试或理论研究中经常用到。广为人知的s-α的Cyclone测试(benchmark)[17]事实上是$\alpha = 0$，即，同心圆。

为了使得所有变量都是解析的，我们需要特定的q剖面以避免数值积分$r(\psi_p) = \sqrt{2\int q d\psi_p}$，其中我们用到$\psi_t = r^2/2$及$d\psi_t/d\psi_p = q$。一个通常用的选择是

$$q = q_1 + q_2\hat{r}^2, \tag{A.41}$$

其中$\hat{r} = r/a$，或

$$q = q_1 + q_2\hat{\psi}_p + q_3\hat{\psi}_p{}^2, \tag{A.42}$$

其中$\hat{\psi}_p = \psi_p/\psi_w$，$\psi_w$是边界壁上的$\psi_p$。

对(A.41)，我们得到

$$\psi_p = \frac{a^2}{2q_2}\ln\left(1 + \frac{2q_2}{a^2q_1}\psi_t\right) = \frac{a^2}{2q_2}\ln\left(1 + \frac{q_2}{q_1}\hat{r}^2\right). \tag{A.43}$$

对(A.42)，我们得到

$$\psi_w\left(q_1\hat{\psi}_p + \frac{q_2}{2}\hat{\psi}_p{}^2 + \frac{q_3}{3}\hat{\psi}_p{}^3\right) = \frac{r^2}{2}, \tag{A.44}$$

得出

$$\psi_p = \frac{r^2}{2\bar{q}}, \tag{A.45}$$

其中$\bar{q} = q_1 + q_2\hat{\psi}_p + q_3\hat{\psi}_p{}^2$及$a = 2\bar{q}(1)\psi_w$。这个解析平衡是GTC中默认使用的。

所有其他变量可以在前面的描述中找到，其中一些为：$R = 1 + rcos\theta$，$B = \sqrt{B_t^2 + B_p^2}$，$B_t = 1/R = 1 - r\cos\theta$，$B_p = r/qR$，$g = 1$，$I = r^2/q$，$\delta = 0$。通常，我们使用磁面(Boozer)坐标，从而需要注意$\theta = \theta_0 - r\sin\theta_0$。所以，到$O(\epsilon^2)$，我们可以使用

$$R = 1 + r_f\cos\theta_f - r^2\sin^2\theta_f, \tag{A.46a}$$

$$Z = r_f\sin\theta_f + r_f^2\sin\theta_f\cos\theta_f, \tag{A.46b}$$

$$B = 1 - r_f\cos\theta_f + r_f^2. \tag{A.46c}$$

形式(A.46)(另见文献[111])在解析计算中有用，但在数值研究中并不佳，因为此时磁面在二阶下非圆，r/a非小量时误差较大。为了保证磁面为圆，我们宜采用原来的形式(4.1)，数值中可采用前文提及的插值求逆的方式进行θ和θ_f间的转换。

附录 B　ITG本征方程矩阵形式

我们这里详细给出第6章中ITG本征方程转化为矩阵本征值问题的过程。

原始的一维ITG本征方程(6.2)

$$\left\{\frac{\sigma^2}{\omega^2}\frac{d^2}{d\vartheta^2}+k_\theta^2\rho_i^2[1+s^2(\vartheta-\vartheta_k)^2]+\frac{2\epsilon_n}{\omega}[\cos\vartheta+s(\vartheta-\vartheta_k)\sin\vartheta]+\frac{\omega-1}{\omega+\eta_s}\right\}\delta\hat{\phi}(\vartheta,\vartheta_k)=0, \quad (6.2)$$

等价于

$$\left\{\sigma^2\frac{d^2}{d\vartheta^2}+\omega^2 f_a(\vartheta)+\omega f_b(\vartheta)+\omega^2\frac{\omega-1}{\omega+\eta_s}\right\}\delta\hat{\phi}(\vartheta,\vartheta_k)=0, \quad (B.1)$$

其中$f_a(\vartheta)=k_\theta^2\rho_i^2[1+s^2(\vartheta-\vartheta_k)^2]$及$f_b(\vartheta)=2\epsilon_n[\cos\vartheta+s(\vartheta-\vartheta_k)\sin\vartheta]$。方程(B.1)进一步化为

$$\left\{\omega^3[f_a(\vartheta+1)]+\omega^2[f_b(\vartheta)+\eta_s f_a(\vartheta)-1]+\omega[\sigma^2\frac{d^2}{d\vartheta^2}+\eta_s f_b(\vartheta)]+\eta_s\sigma^2\frac{d^2}{d\vartheta^2}\right\}\delta\hat{\phi}(\vartheta,\vartheta_k)=0, \quad (B.2)$$

再使用有限差分离散

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\delta\hat{\phi}=\frac{\delta\hat{\phi}_{j+1}-2\delta\hat{\phi}_j+\delta\hat{\phi}_{j-1}}{\Delta\vartheta^2}, \quad (B.3)$$

方程(B.2)化为方程(3.27)可解的矩阵形式。

二维ITG本征方程(6.3)的矩阵形式也类似，但是多一个极向傅里叶维度m。多出的维度与节4.3中处理全局理想磁流体本征模方程(4.5)类似。

附录 C　典型气球模结构

考虑托卡马克位形中任意场量，如扰动静电势，傅里叶变换为

$$\delta\phi(r,\theta,\zeta,t) = e^{-i(n\zeta-\omega t)}\sum_m \delta\hat{\phi}_m(r)e^{im\theta}, \tag{C.1}$$

以上假设了环向对称，单n，单振荡频率ω。

典型气球模结构不同极向模数m对应的$\delta\hat{\phi}_m(r-r_m)$很相似，均局域聚集在有理面$r_m$附近(因为通常$k_\parallel = (nq-m)/R_0 \simeq 0$的模最容易不稳定或阻尼最小)，其中$nq(r_m) = m$。作为示意，我们可以用高斯形式$\delta\hat{\phi}_m(r) = A(r)\exp[-(r-r_m)^2/\Delta r_c^2]$，其中$\Delta r_c$ 代表每个傅

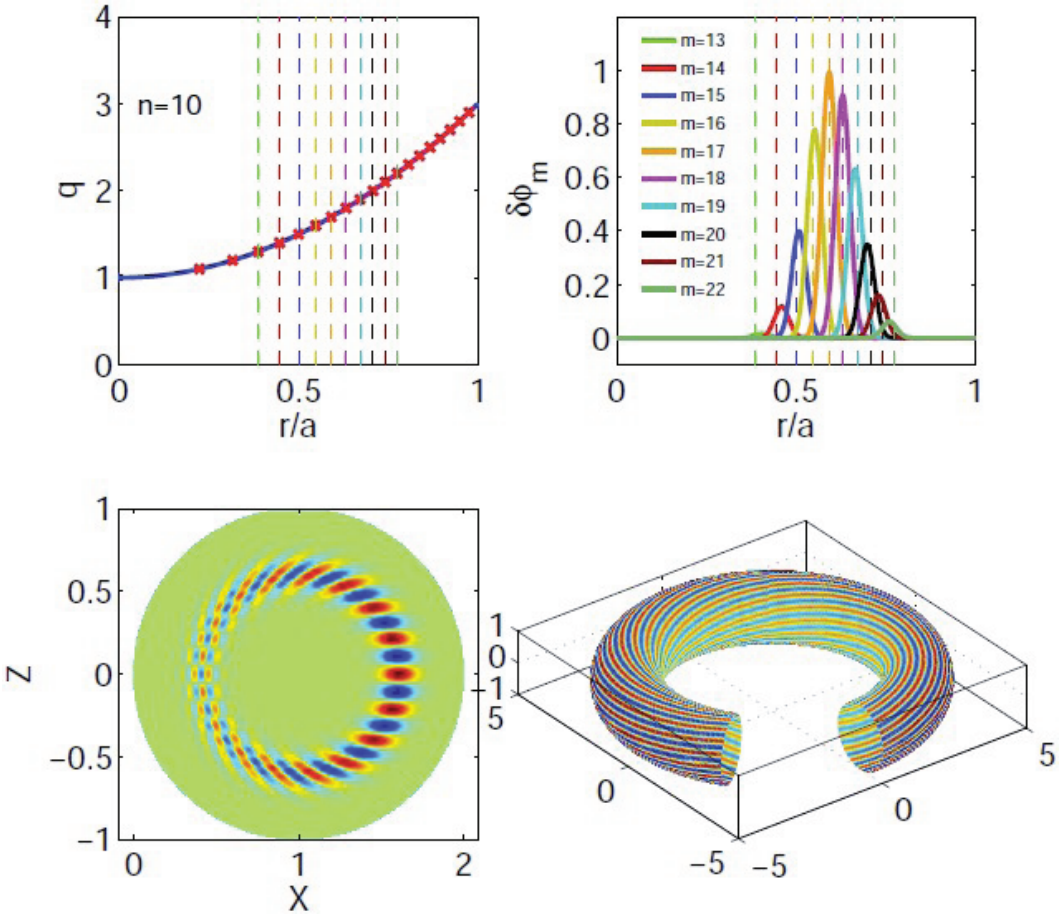

图 C.1　托卡马克中典型的气球模结构。

里叶分量的模宽度，我们这里假设相同。包络$A(r)$一般也接近高斯形式，假设$A(r) = \exp[-(r-r_c)^2/\Delta A^2]$，其中$r_c$为模局域的径向位置，$\Delta A$为模宽度。给定$q(r)$等参数，再用上面形式表达式，托卡马克中典型的气球模结构如图C.1。

托卡马克中此前绝大部分全局微观不稳定性的结果看到的扰动电势的模结构均与图C.1大同小异。本文第6章考察的是强梯度下这种典型模结构的破坏。

参考文献

[1] Simon David Pinches. Nonlinear Interaction of Fast Particles with Alfven Waves in Tokamaks[D]. :University of Nottingham, 1996.

[2] www-fusion-magnetique.cea.fr/gb/fusion/physique/modesconfinement.htm.

[3] Christian Perez. MHD analysis of edge instabilities in the JET tokamak[D]. :University of Utrecht, 2004.

[4] P.B. Snyder, H.R. Wilson, J.R. Ferron, L.L. Lao, A.W. Leonard, D. Mossessian, M. Murakami, T.H. Osborne, A.D. Turnbull, X.Q. Xu. Elms and constraints on the h-mode pedestal: peeling ballooning stability calculation and comparison with experiment[J]. Nuclear Fusion, 2004. 44(2):320.

[5] Sanae-I. Itoh, Kimitaka Itoh. Model of l to h-mode transition in tokamak[J]. Phys. Rev. Lett., May 1988. 60:2276–2279. doi:10.1103/PhysRevLett.60.2276.

[6] H. Zohm. Dynamic behavior of the *L* - *H* transition[J]. Phys. Rev. Lett., Jan 1994. 72:222–225. doi:10.1103/PhysRevLett.72.222.

[7] Sanae-I Itoh, Kimitaka Itoh, Atsushi Fukuyama, Masatoshi Yagi. A model of giant elms[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1996. 38(4):527.

[8] Eun-jin Kim, P. H. Diamond. Zonal flows and transient dynamics of the l-h transition[J]. Phys. Rev. Lett., May 2003. 90:185006. doi:10.1103/PhysRevLett.90.185006.

[9] K. Miki, P. H. Diamond, O. D. Gurcan, G. R. Tynan, T. Estrada, L. Schmitz, G. S. Xu. Spatio-temporal evolution of the l $-->$ i $-->$ h transition[J]. Physics of Plasmas, 2012. 19(9):092306. doi:10.1063/1.4753931.

[10] Z. X. Liu, X. Q. Xu, X. Gao, T. Y. Xia, I. Joseph, W. H. Meyer, S. C. Liu, G. S. Xu, L. M. Shao, S. Y. Ding, G. Q. Li, J. G. Li. Three dimensional nonlinear simulations of edge localized modes on the east tokamak using bout++ code[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2014. 21(9):090705. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4895799.

[11] F. Orain, M. Bécoulet, T.Ã. Huijsmans, G. G. Dif-Pradalier, M. Hoelzl, J. Morales, X. Garbet, E. Nardon, S. Pamela, C. Passeron, G. Latu, A. Fil, P. Cahyna. Resistive reduced mhd modeling of multi-edge-localized-mode cycles in tokamak x-point plasmas[J]. Phys. Rev. Lett., Jan 2015. 114:035001. doi:10.1103/PhysRevLett.114.035001.

[12] E. Wang, X. Xu, J. Candy, R.J. Groebner, P.B. Snyder, Y. Chen, S.E. Parker, W. Wan, Gaimin Lu, J.Q.

Dong. Linear gyrokinetic analysis of a diii-d h-mode pedestal near the ideal ballooning threshold[J]. Nuclear Fusion, 2012. 52(10):103015.

[13] C. Holland, C.C. Petty, L. Schmitz, K.H. Burrell, G.R. McKee, T.L. Rhodes, J. Candy. Progress in gyro validation studies of diii-d h-mode plasmas[J]. Nuclear Fusion, 2012. 52(11):114007.

[14] Yasuaki KISHIMOTO. Anomalous transport[J]. Journal of plasma and fusion research, dec 2000. 76(12):1280–1308. ISSN 09187928.

[15] Sara Moradi. Transport Analysis in Tokamak Plasmas[D]. :Universite Libre de Bruxelles, 2010. RITM code related.

[16] John Wesson. Tokamaks[M]. Oxford University Press, 2011.

[17] A. M. Dimits, G. Bateman, M. A. Beer, B. I. Cohen, W. Dorland, G. W. Hammett, C. Kim, J. E. Kinsey, M. Kotschenreuther, A. H. Kritz, L. L. Lao, J. Mandrekas, W. M. Nevins, S. E. Parker, A. J. Redd, D. E. Shumaker, R. Sydora, , J. Weiland. Comparisons and physics basis of tokamak transport models and turbulence simulations[J]. Phys. Plasmas, 2000. 7:969. doi:10.1063/1.873896.

[18] Z. Lin, T. S. Hahm, W. W. Lee, W. M. Tang, R. B. White. Turbulent transport reduction by zonal flows: Massively parallel simulations[J]. Science, 1998. 281(5384):1835–1837. doi:10.1126/science.281.5384.1835.

[19] T. Xie, Y. Z. Zhang, S. M. Mahajan, A. K. Wang. Ballooning theory of the second kind—two dimensional tokamak modes[J]. Physics of Plasmas, 2012. 19(7):072105. doi:10.1063/1.4731724.

[20] D. Dickinson, C. M. Roach, J. M. Skipp, H. R. Wilson. Structure of micro-instabilities in tokamak plasmas: Stiff transport or plasma eruptions?[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2014. 21(1):010702. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4861628.

[21] Rameswar Singh, S. Brunner, R. Ganesh, F. Jenko. Finite ballooning angle effects on ion temperature gradient driven mode in gyrokinetic flux tube simulations[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2014. 21(3):032115. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4868425.

[22] D. P. Fulton, Z. Lin, I. Holod, Y. Xiao. Microturbulence in diii-d tokamak pedestal. i. electrostatic instabilities[J]. Physics of Plasmas, 2014. 21(4):042110. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4871387.

[23] H.Q. Wang, G.S. Xu, H.Y. Guo, B.N. Wan, R. Chen, S.Y. Ding, N. Yan, L. Wang, X.Z. Gong, S.C. Liu, L.M. Shao, L. Chen, W. Zhang, G.H. Hu, Y.L. Liu, Y.L. Li, N. Zhao. Enhanced-recycling h-mode regimes with edge coherent modes achieved by rf heating with lithium-wall conditioning in the east superconducting tokamak[J]. Nuclear Fusion, 2014. 54(12):124001.

[24] D. Dickinson, C. M. Roach, S. Saarelma, R. Scannell, A. Kirk, H. R. Wilson. Kinetic instabilities that limit β in the edge of a tokamak plasma: A picture of an h-mode pedestal[J]. Phys. Rev. Lett., Mar 2012. 108:135002. doi:10.1103/PhysRevLett.108.135002.

[25] Weigang Wan, Scott E. Parker, Yang Chen, Richard J. Groebner, Zheng Yan, Alexei Y. Pankin, Scott E.

Kruger. Global gyrokinetic simulations of the h-mode tokamak edge pedestal[J]. Physics of Plasmas, 2013. 20(5):055902. doi:10.1063/1.4803890.

[26] J. Candy. Beta scaling of transport in microturbulence simulations[J]. Physics of Plasmas, 2005. 12(7):072307. doi:10.1063/1.1954123.

[27] M. J. Pueschel, M. Kammerer, F. Jenko. Gyrokinetic turbulence simulations at high plasma beta[J]. Physics of Plasmas, 2008. 15(10):102310.

[28] E. A. Belli, J. Candy. Fully electromagnetic gyrokinetic eigenmode analysis of high-beta shaped plasmas[J]. Physics of Plasmas, 2010. 17(11):112314. doi:10.1063/1.3495976.

[29] I. Holod, Z. Lin. Verification of electromagnetic fluid-kinetic hybrid electron model in global gyrokinetic particle simulation[J]. Physics of Plasmas, 2013. 20(3):032309. doi:10.1063/1.4798392.

[30] Weigang Wan, Scott E. Parker, Yang Chen, Zheng Yan, Richard J. Groebner, Philip B. Snyder. Global gyrokinetic simulation of tokamak edge pedestal instabilities[J]. Phys. Rev. Lett., Nov 2012. 109:185004. doi:10.1103/PhysRevLett.109.185004.

[31] J D Lawson. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor[J]. Proceedings of the Physical Society. Section B, 1957. 70(1):6.

[32] O. A. Hurricane, D. A. Callahan, D. T. Casey, P. M. Celliers, C. Cerjan, E. L. Dewald, T. R. Dittrich, T. Doppner, D. E. Hinkel, L. F. Berzak Hopkins, J. L. Kline, S. Le Pape, T. Ma, A. G. MacPhee, J. L. Milovich, A. Pak, H.-S. Park, P. K. Patel, B. A. Remington, J. D. Salmonson, P. T. Springer, R. Tommasini. Fuel gain exceeding unity in an inertially confined fusion implosion[J]. Nature, February 2014. 506(7488):343–348. ISSN 0028-0836.

[33] T. Fujita, Y. Kamada, S. Ishida, Y. Neyatani, T. Oikawa, S. Ide, S. Takeji, Y. Koide, A. Isayama, T. Fukuda, T. Hatae, Y. Ishii, T. Ozeki, H. Shirai, JT-60 Team. High performance experiments in jt-60u reversed shear discharges[J]. Nuclear Fusion, 1999. 39(11Y):1627.

[34] MITSURU KIKUCHI, KARL LACKNER, MINH QUANG TRAN. Fusion Physics[M]. IAEA, 2012.

[35] Jeffrey Freidberg. Plasma Physics and Fusion Energy[M]. Cambridge Univ. Press, 2007.

[36] Francis F. Chen. An Indispensable Truth: How Fusion Power Can Save the Planet[M]. Springer, 2011.

[37] Mitsuru Kikuchi. Frontiers in Fusion Research: Physics and Fusion[M]. Springer, 2011.

[38] M. Kikuchi, M. Azumi. Steady-state tokamak research: Core physics[J]. Rev. Mod. Phys., Dec 2012. 84:1807–1854. doi:10.1103/RevModPhys.84.1807.

[39] Yu. L. Klimontovich. The statistical theory of Non-equilibrium processes in a plasma[M]. Pergamon Press, 1967.

[40] G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low. The boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1956. 236(1204):pp. 112–118. ISSN 00804630.

[41] S. I. Braginskii. Transport processes in a plasma[M], volume Reviews of Plasma Physics, Vol. 1, p 205-311. 1965.

[42] F. Wagner, G. Becker, K. Behringer, D. Campbell, A. Eberhagen, W. Engelhardt, G. Fussmann, O. Gehre, J. Gernhardt, G. v. Gierke, G. Haas, M. Huang, F. Karger, M. Keilhacker, O. Klüber, M. Kornherr, K. Lackner, G. Lisitano, G. G. Lister, H. M. Mayer, D. Meisel, E. R. Müller, H. Murmann, H. Niedermeyer, W. Poschenrieder, H. Rapp, H. Röhr, F. Schneider, G. Siller, E. Speth, A. Stäbler, K. H. Steuer, G. Venus, O. Vollmer, Z. Yü. Regime of improved confinement and high beta in neutral-beam-heated divertor discharges of the asdex tokamak[J]. Phys. Rev. Lett., Nov 1982. 49:1408–1412. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1408.

[43] F Wagner. A quarter-century of h-mode studies[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2007. 49(12B):B1.

[44] D.G. Whyte, A.E. Hubbard, J.W. Hughes, B. Lipschultz, J.E. Rice, E.S. Marmar, M. Greenwald, I. Cziegler, A. Dominguez, T. Golfinopoulos, N. Howard, L. Lin, R.M. McDermott, M. Porkolab, M.L. Reinke, J. Terry, N. Tsujii, S. Wolfe, S. Wukitch, Y. Lin, the Alcator C-Mod Team. I-mode: an h-mode energy confinement regime with l-mode particle transport in alcator c-mod[J]. Nuclear Fusion, 2010. 50(10):105005.

[45] A. E. White, N. T. Howard, A. J. Creely, M. A. Chilenski, M. Greenwald, A. E. Hubbard, J. W. Hughes, E. Marmar, J. E. Rice, J. M. Sierchio, C. Sung, J. R. Walk, D. G. Whyte, D. R. Mikkelsen, E. M. Edlund, C. Kung, C. Holland, J. Candy, C. C. Petty, M. L. Reinke, C. Theiler. Nonlinear gyrokinetic simulations of the i-mode high confinement regime and comparisons with experimenta)[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2015. 22(5):056109. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4921150.

[46] J. Li, H. Y. Guo, B. N. Wan, X. Z. Gong, Y. F. Liang, G. S. Xu, K. F. Gan, J. S. Hu, H. Q. Wang, L. Wang, L. Zeng, Y. P. Zhao, P. Denner, G. L. Jackson, A. Loarte, R. Maingi, J. E. Menard, M. Rack, X. L. Zou. A long-pulse high-confinement plasma regime in the experimental advanced superconducting tokamak[J]. Nature Physics, 2013. 9:817. ISSN 1745-2481.

[47] J. W. Connor, R. J. Hastie, H. R. Wilson, R. L. Miller. Magnetohydrodynamic stability of tokamak edge plasmas[J]. Physics of Plasmas, 1998. 5(7):2687–2700. doi:10.1063/1.872956.

[48] P. B. Snyder, H. R. Wilson, J. R. Ferron, L. L. Lao, A. W. Leonard, T. H. Osborne, A. D. Turnbull, D. Mossessian, M. Murakami, X. Q. Xu. Edge localized modes and the pedestal: A model based on coupled peeling ballooning modes[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2002. 9(5):2037–2043. doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.1449463.

[49] W. Xi, P. Q. Xu, X. H. Diamond, P.˙ Phase dynamics criterion for fast relaxation of high-confinement-mode plasmas[J]. Phys. Rev. Lett., Feb 2014. 112:085001. doi:10.1103/PhysRevLett.112.085001.

[50] J. L. Terry, M. L. Reinke, J. W. Hughes, B. LaBombard, C. Theiler, G. M. Wallace, S. G. Baek, D. Brunner, R. M. Churchill, E. Edlund, P. Ennever, I. Faust, T. Golfinopoulos, M. Greenwald, A. E. Hubbard,

J. Irby, Y. Lin, R. R. Parker, J. E. Rice, S. Shiraiwa, J. R. Walk, S. J. Wukitch, P. Xu, C-Mod Team. Improved confinement in high-density h-modes via modification of the plasma boundary with lower hybrid wavesa)[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2015. 22(5):056114. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4920964.

[51] J W Connor, H R Wilson. A review of theories of the l-h transition[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2000. 42(1):R1.

[52] S.-I. Itoh, K. Itoh, A. Fukuyama. The elmy h mode as a limit cycle and the transient responses of h modes in tokamaks[J]. Nuclear Fusion, 1993. 33(10):1445.

[53] Xingquan Wu, Guosheng Xu, Baonian Wan, Jens Juul Rasmussen, Volker Naulin, Anders Henry Nielsen. One-dimensional modelling of limit-cycle oscillation and h-mode power scaling[J]. Nuclear Fusion, 2015. 55(5):053029.

[54] T.Y. Xia, X.Q. Xu, P.W. Xi. Six-field two-fluid simulations of peeling ballooning modes using bout++[J]. Nuclear Fusion, 2013. 53(7):073009.

[55] P. C. Stangeby. The Plasma Boundary of Magnetic Fusion Devices[M]. Series in Plasma Physics. IOP, 2000.

[56] W.M. Tang. Microinstability theory in tokamaks[J]. Nuclear Fusion, 1978. 18(8):1089.

[57] W. Horton. Drift waves and transport[J]. Rev. Mod. Phys., Apr 1999. 71(3):735–778. doi:10.1103/RevModPhys.71.735.

[58] G. Rewoldt, W. M. Tang, M. S. Chance. Electromagnetic kinetic toroidal eigenmodes for general magnetohydrodynamic equilibria[J]. Physics of Fluids, 1982. 25(3):480–490. doi:10.1063/1.863760.

[59] Jiaqi Dong, L. Chen, F. Zonca. Study of kinetic shear alfven modes driven by ion temperature gradient in tokamak plasmas[J]. Nuclear Fusion, 1999. 39(8):1041.

[60] F. L. Hinton, R. D. Hazeltine. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems[J]. Rev. Mod. Phys., Apr 1976. 48(2):239–308. doi:10.1103/RevModPhys.48.239.

[61] P. Helander, D.J. Sigmar. Collisional Transport in Magnetized Plasmas[M]. Cambridge University Press, 2001.

[62] T. M. O'Neil, J. H. Winfrey, J. H. Malmberg. Nonlinear interaction of a small cold beam and a plasma[J]. Physics of Fluids, 1971. 14(6):1204–1212.

[63] J. Zhu, G. Y. Fu, Z. W. Ma. Nonlinear dynamics of toroidal alfven eigenmodes driven by energetic particles[J]. Physics of Plasmas, 2013. 20(7):072508. doi:10.1063/1.4816950.

[64] C.K. Birdsall, A.B Langdon. Plasma Physcis via Computer Simulation[M]. IOP, 1991.

[65] Z. Lin, S. Ethier, T. S. Hahm, W. M. Tang. Size scaling of turbulent transport in magnetically confined plasmas[J]. Phys. Rev. Lett., Apr 2002. 88:195004. doi:10.1103/PhysRevLett.88.195004.

[66] Wendell Horton. Nonlinear drift waves and transport in magnetized plasma[J]. Physics Reports, 1990.

192(1-3):1 – 177. ISSN 0370-1573. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(90)90148-U.

[67] G R Tynan, A Fujisawa, G McKee. A review of experimental drift turbulence studies[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2009. 51(11):113001.

[68] Wendell Horton. Turbulent Transport in Magnetized Plasmas[M]. World Scientific Publishing Company, 2012.

[69] X. Garbet, Y. Idomura, L. Villard, T.H. Watanabe. Gyrokinetic simulations of turbulent transport[J]. Nuclear Fusion, 2010. 50(4):043002.

[70] Niels Winsor, John L. Johnson, John M. Dawson. Geodesic acoustic waves in hydromagnetic systems[J]. Physics of Fluids, 1968. 11(11):2448–2450. doi:10.1063/1.1691835.

[71] Zhe Gao, K. Itoh, H. Sanuki, J. Q. Dong. Multiple eigenmodes of geodesic acoustic mode in collisionless plasmas[J]. Physics of Plasmas, 2006. 13(10):100702. doi:10.1063/1.2359722.

[72] Zhiyong Qiu, Liu Chen, Fulvio Zonca. Collisionless damping of short wavelength geodesic acoustic modes[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2009. 51(1):012001.

[73] Z. Qiu, L. Chen, F. Zonca. Excitation of kinetic geodesic acoustic modes by drift waves in nonuniform plasmas[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2014. 21(2):022304. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4863973.

[74] Feng Liu, Z. Lin, J. Q. Dong, K. J. Zhao. Gyrokinetic simulation of turbulence driven geodesic acoustic modes in edge plasmas of hl-2a tokamak[J]. Phys. Plasmas, 2010. 17:112318. doi:10.1063/1.3496981.

[75] Liu Chen, Zhihong Lin, Roscoe White. Excitation of zonal flow by drift waves in toroidal plasmas[J]. Physics of Plasmas, 2000. 7(8):3129–3132. doi:10.1063/1.874222.

[76] P H Diamond, S-I Itoh, K Itoh, T S Hahm. Zonal flows in plasma a review[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2005. 47(5):R35.

[77] Akira Hasegawa, Kunioki Mima. Stationary spectrum of strong turbulence in magnetized nonuniform plasma[J]. Phys. Rev. Lett., Jul 1977. 39(4):205–208. doi:10.1103/PhysRevLett.39.205.

[78] Akira Hasegawa, Masahiro Wakatani. Plasma edge turbulence[J]. Phys. Rev. Lett., Feb 1983. 50:682–686. doi:10.1103/PhysRevLett.50.682.

[79] Ronld E. Waltz. Lecture Series on Turbulent Transport in Tokamaks[M]. 1986.

[80] Z. Lin, T. S. Hahm. Turbulence spreading and transport scaling in global gyrokinetic particle simulations[J]. Physics of Plasmas, 2004. 11(3):1099–1108. doi:10.1063/1.1647136.

[81] I. Holod, W. L. Zhang, Y. Xiao, Z. Lin. Electromagnetic formulation of global gyrokinetic particle simulation in toroidal geometry[J]. Physics of Plasmas, 2009. 16(12):122307. doi:10.1063/1.3273070.

[82] W. Deng, Z. Lin, I. Holod. Gyrokinetic simulation model for kinetic magnetohydrodynamic processes in magnetized plasmas[J]. Nuclear Fusion, 2012. 52(2):023005.

[83] Yong Xiao, Ihor Holod, Zhixuan Wang, Zhihong Lin, Taige Zhang. Gyrokinetic particle simulation of

microturbulence for general magnetic geometry and experimental profiles[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2015. 22(2):022516. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4908275.

[84] A. J. Brizard, T. S. Hahm. Foundations of nonlinear gyrokinetic theory[J]. Rev. Mod. Phys., Apr 2007. 79(2):421–468. doi:10.1103/RevModPhys.79.421.

[85] Andreas Bierwage, Liu Chen. Awecs: A linear gyrokinetic df particle-in-cell simulation code for the study of alfvenic instabilities in high-beta tokamak plasmas[J]. COMMUNICATIONS IN COMPUTATIONAL PHYSICS, 2008. 4(3):457–495.

[86] J. Q. Dong, L. Chen, F. Zonca, G. D. Jian. Study of kinetic shear alfven instability in tokamak plasmas[J]. Phys. Plasmas, 2004. 11:997. doi:10.1063/1.1643919.

[87] Yang Chen, Scott E. Parker. A [delta]f particle method for gyrokinetic simulations with kinetic electrons and electromagnetic perturbations[J]. Journal of Computational Physics, 2003. 189(2):463 – 475. ISSN 0021-9991. doi:DOI:10.1016/S0021-9991(03)00228-6.

[88] Yang Chen, Scott E. Parker. Electromagnetic gyrokinetic delta f particle-in-cell turbulence simulation with realistic equilibrium profiles and geometry[J]. Journal of Computational Physics, 2007. 220(2):839 – 855. ISSN 0021-9991. doi:10.1016/j.jcp.2006.05.028.

[89] Mike Kotschenreuther, G. Rewoldt, W.M. Tang. Comparison of initial value and eigenvalue codes for kinetic toroidal plasma instabilities[J]. Computer Physics Communications, 1995. 88(2-3):128 – 140. ISSN 0010-4655. doi:10.1016/0010-4655(95)00035-E. Http://gs2.sourceforge.net/docs/kot95/.

[90] J. Candy, R.E. Waltz. An eulerian gyrokinetic-maxwell solver[J]. Journal of Computational Physics, 2003. 186(2):545 – 581. ISSN 0021-9991. doi:10.1016/S0021-9991(03)00079-2.

[91] F. Jenko, W. Dorland, M. Kotschenreuther, B. N. Rogers. Electron temperature gradient driven turbulence[J]. Phys. Plasmas, 2000. 7:1904. doi:10.1063/1.874014.

[92] C. S. Chang, S. Ku, P. H. Diamond, Z. Lin, S. Parker, T. S. Hahm, N. Samatova. Compressed ion temperature gradient turbulence in diverted tokamak edge[J]. Physics of Plasmas, 2009. 16(5):056108. doi:10.1063/1.3099329.

[93] S. Ku, C.S. Chang, P.H. Diamond. Full-f gyrokinetic particle simulation of centrally heated global itg turbulence from magnetic axis to edge pedestal top in a realistic tokamak geometry[J]. Nuclear Fusion, 2009. 49(11):115021.

[94] S. Jolliet, A. Bottino, P. Angelino, R. Hatzky, T.M. Tran, B.F. Mcmillan, O. Sauter, K. Appert, Y. Idomura, L. Villard. A global collisionless {PIC} code in magnetic coordinates[J]. Computer Physics Communications, 2007. 177(5):409 – 425. ISSN 0010-4655. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2007.04.006.

[95] A.G. Peeters, Y. Camenen, F.J. Casson, W.A. Hornsby, A.P. Snodin, D. Strintzi, G. Szepesi. The nonlinear gyro-kinetic flux tube code {GKW}[J]. Computer Physics Communications, 2009. 180(12):2650 – 2672. ISSN 0010-4655. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2009.07.001.

[96] T.-H. Watanabe, H. Sugama. Velocity space structures of distribution function in toroidal ion temperature gradient turbulence[J]. Nuclear Fusion, 2006. 46(1):24.

[97] T.-H. Watanabe, H. Sugama, S. Ferrando-Margalet. Gyrokinetic simulation of zonal flows and ion temperature gradient turbulence in helical systems[J]. Nuclear Fusion, 2007. 47(9):1383.

[98] Zhihong Lin. Gyrokinetic Particle Simulation of Neoclassical Transport[D]. :Princeton, 1996.

[99] R. B. White, M. S. Chance. Hamiltonian guiding center drift orbit calculation for plasmas of arbitrary cross section[J]. Physics of Fluids, 1984. 27(10):2455–2467. doi:10.1063/1.864527.

[100] Z. Lin, W. W. Lee. Method for solving the gyrokinetic poisson equation in general geometry[J]. Phys. Rev. E, Nov 1995. 52:5646–5652. doi:10.1103/PhysRevE.52.5646.

[101] W. W. Lee. Gyrokinetic approach in particle simulation[J]. Phys. Fluids, 1983. 26:556. doi:10.1063/1.864140.

[102] W. W. Lee. Gyrokinetic particle simulation model[J]. Journal of Computational Physics, 1987. 72(1):243 – 269. ISSN 0021-9991. doi:DOI:10.1016/0021-9991(87)90080-5.

[103] R. B. White. The Theory of Toroidally Confined Plasmas[M]. World Scientific Imperial College Press, 2006. Revised second edition 2006.

[104] Zhihong Lin, Liu Chen. A fluid–kinetic hybrid electron model for electromagnetic simulations[J]. Physics of Plasmas, 2001. 8(5):1447–1450.

[105] Gregory W. Hammett, Francis W. Perkins. Fluid moment models for landau damping with application to the ion-temperature-gradient instability[J]. Phys. Rev. Lett., Jun 1990. 64:3019–3022. doi:10.1103/PhysRevLett.64.3019.

[106] G. W. Hammett, W. Dorland, F. W. Perkins. Fluid models of phase mixing, landau damping, and nonlinear gyrokinetic dynamics[J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1992. 4(7):2052–2061. doi:10.1063/1.860014.

[107] Huasheng Xie, Yong Xiao. Pdrk: A general kinetic dispersion relation solver for magnetized plasma[J]. arXiv: 1410.2678, Plasma Science and Technology, to appear, 2014.

[108] Huasheng Xie. Pdrf: A general dispersion relation solver for magnetized multi-fluid plasma[J]. Computer Physics Communications, 2014. 185(2):670 – 675. ISSN 0010-4655. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2013.10.012.

[109] Richard D. Hazeltine, James D. Meiss. Plasma Confinement[M]. Perseus Books, 1992.

[110] H. R. Strauss. Nonlinear, three-dimensional magnetohydrodynamics of noncircular tokamaks[J]. Physics of Fluids, 1976. 19(1):134–140. doi:10.1063/1.861310.

[111] J. D. Meiss, R. D. Hazeltine. Canonical coordinates for guiding center particles[J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1990. 2(11):2563–2567. doi:10.1063/1.859380.

[112] L. L. Lao, R. M. Wieland, W. A. Houlberg, S. P. Hirshman. Vmoms – a computer code for finding moment

solutions to the grad-shafranov equation[J]. Computer Physics Communications, 1982. 27(2):129 – 146. ISSN 0010-4655. doi:DOI:10.1016/0010-4655(82)90069-8.

[113] J. W. Connor, R. J. Hastie, J. B. Taylor. Shear, periodicity, and plasma ballooning modes[J]. Phys. Rev. Lett., Feb 1978. 40(6):396–399. doi:10.1103/PhysRevLett.40.396.

[114] G. Y. Fu, H. L. Berk. Effects of pressure gradient on existence of alfven cascade modes in reversed shear tokamak plasmas[J]. Phys. Plasmas, 2006. 13:052502. doi:10.1063/1.2196246.

[115] Limin Yu, Xianmei Zhang, Zheng-Mao Sheng. Numerical study of compressibility effects on the reversed shear alfven eigenmode in tokamak plasma[J]. Physics of Plasmas, 2013. 20(8):082509. doi:10.1063/1.4817962.

[116] B. N. Breizman, H. L. Berk, M. S. Pekker, S. D. Pinches, S. E. Sharapov. Theory of alfven eigenmodes in shear reversed plasmas[J]. Phys. Plasmas, 2003. 10:3649. doi:10.1063/1.1597495.

[117] B. N. Breizman, M. S. Pekker, S. E. Sharapov JET EFDA contributors. Plasma pressure effect on alfven cascade eigenmodes[J]. Physics of Plasmas, 2005. 12(11):112506. doi:10.1063/1.2130692.

[118] G. Vlad, F. Zonca, S. Briguglio. Dynamics of alfven waves in tokamaks[J]. Nuovo Cimento Rivista Serie, 1999. 22:1–97. doi:10.1007/BF02874568. 2007.

[119] Fulvio Zonca, Liu Chen, Robert A Santoro. Kinetic theory of low-frequency alfven modes in tokamaks[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1996. 38(11):2011.

[120] C. Z. Cheng, M. S. Chance. Low-n shear alfven spectra in axisymmetric toroidal plasmas[J]. Physics of Fluids, 1986. 29(11):3695–3701. doi:10.1063/1.865801.

[121] Youjun Hu, Guoqiang Li, N. N. Gorelenkov, Huishan Cai, Wenjun Yang, Deng Zhou, Qilong Ren. Numerical study of alfven eigenmodes in the experimental advanced superconducting tokamak[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2014. 21(5):052510. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4879826.

[122] H. L. Berk, J. W. Van Dam, Z. Guo, D. M. Lindberg. Continuum damping of low-n toroidicity-induced shear alfven eigenmodes[J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1992. 4(7):1806–1835. doi:10.1063/1.860455.

[123] Hua-sheng Xie, Yong Xiao. Parallel equilibrium current effect on existence of reversed shear alfven eigenmodes[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2015. 22(2):022518. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4913487.

[124] G. Y. Fu, J. W. Van Dam. Excitation of the toroidicity-induced shear alfven eigenmode by fusion alpha particles in an ignited tokamak[J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1989. 1(10):1949–1952. doi:10.1063/1.859057.

[125] Limin Yu, Guo yong Fu, Zheng-Mao Sheng. Kinetic damping of alfven eigenmodes in general tokamak geometry[J]. Phys. Plasmas, 2009. 16:072505. doi:10.1063/1.3190158.

[126] W. Chen, Z. Qiu, X. T. Ding, H. S. Xie, L. M. Yu, X. Q. Ji, J. X. Li, Y. G. Li, J. Q. Dong, Z. B. Shi,

Y. P. Zhang, J. Y. Cao, X. M. Song, S. D. Song, M. Xu, Q. W. Yang, Yi. Liu, L. W. Yan, X. R. Duan. Observation and theory of nonlinear mode couplings between shear alfven wave and magnetic island in tokamak plasmas[J]. EPL (Europhysics Letters), 2014. 107(2):25001.

[127] W. Chen, LiMin Yu, Yi. Liu, X.T. Ding, H.S. Xie, J. Zhu, L.M. Yu, X.Q. Ji, J.X. Li, Y.G. Li, D.L. Yu, Z.B. Shi, X.M. Song, J.Y. Cao, S.D. Song, Y.B. Dong, W.L. Zhong, M. Jiang, Z.Y. Cui, Y. Huang, Y. Zhou, J.Q. Dong, M. Xu, F. Xia, L.W. Yan, Q.W. Yang, X.R. Duan, the HL-2A Team. Destabilization of reversed shear alfven eigenmodes driven by energetic ions during nbi in hl-2a plasmas with $q_{min} \sim 1$[J]. Nuclear Fusion, 2014. 54(10):104002.

[128] Y. Chen, S. E. Parker, W. Wan, R. Bravenec. Benchmarking gyrokinetic simulations in a toroidal flux-tube[J]. Physics of Plasmas, 2013. 20(9):092511. doi:10.1063/1.4821982.

[129] J.D. Huba. Nrl plasma formulary. 2009.

[130] X. R. Fu, W. Horton, Y. Xiao, Z. Lin, A. K. Sen, V. Sokolov. Validation of electron temperature gradient turbulence in the columbia linear machine[J]. Physics of Plasmas, 2012. 19(3):032303. doi:10.1063/1.3686148.

[131] Jianying Lang, Scott E. Parker, Yang Chen. Nonlinear saturation of collisionless trapped electron mode turbulence: Zonal flows and zonal density[J]. Phys. Plasmas, 2008. 15:055907. doi:10.1063/1.2884036.

[132] Yong Xiao, Ihor Holod, Wenlu Zhang, Scott Klasky, Zhihong Lin. Fluctuation characteristics and transport properties of collisionless trapped electron mode turbulence[J]. Phys. Plasmas, 2010. 17:022302. doi:10.1063/1.3302504.

[133] W. X. Wang, T. S. Hahm, W. W. Lee, G. Rewoldt, J. Manickam, W. M. Tang. Nonlocal properties of gyrokinetic turbulence and the role of $e \times b$ flow shear[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2007. 14(7):072306. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.2750647.

[134] J. Cheng, J. Q. Dong, K. Itoh, L. W. Yan, M. Xu, K. J. Zhao, W. Y. Hong, Z. H. Huang, X. Q. Ji, W. L. Zhong, D. L. Yu, S.-I. Itoh, L. Nie, D. F. Kong, T. Lan, A. D. Liu, X. L. Zou, Q. W. Yang, X. T. Ding, X. R. Duan, Yong Liu. Dynamics of low-intermediate-high-confinement transitions in toroidal plasmas[J]. Phys. Rev. Lett., Jun 2013. 110:265002. doi:10.1103/PhysRevLett.110.265002.

[135] T. Kobayashi, K. Itoh, T. Ido, K. Kamiya, S.-I. Itoh, Y. Miura, Y. Nagashima, A. Fujisawa, S. Inagaki, K. Ida, K. Hoshino. Spatiotemporal structures of edge limit-cycle oscillation before l-to-h transition in the jft-2m tokamak[J]. Phys. Rev. Lett., Jul 2013. 111:035002. doi:10.1103/PhysRevLett.111.035002.

[136] G. Rewoldt, Z. Lin, Y. Idomura. Linear comparison of gyrokinetic codes with trapped electrons[J]. Computer Physics Communications, 2007. 177(10):775 – 780. ISSN 0010-4655. doi:10.1016/j.cpc.2007.06.017.

[137] J. W. Connor, J. B. Taylor. Ballooning modes or fourier modes in a toroidal plasma?[J]. Physics of Fluids, 1987. 30(10):3180–3185. doi:10.1063/1.866493.

[138] W. Horton, D. Choi, W. M. Tang. Toroidal drift modes driven by ion pressure gradients[J]. Physics of

Fluids (1958-1988), 1981. 24(6):1077–1085. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.863486.

[139] Z. X. Lu. The complex mixed wentzel kramers brillouin full wave approach and its application to the two dimensional mode structure analysis of ion temperature gradient/collisionless trapped electron mode drift waves[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2015. 22(5):052118. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4921331.

[140] Liu Chen, C. Z. Cheng. Drift wave eigenmodes in toroidal plasmas[J]. Physics of Fluids (1958-1988), 1980. 23(11):2242–2249. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.862907.

[141] D Dickinson, C M Roach, S Saarelma, R Scannell, A Kirk, H R Wilson. Microtearing modes at the top of the pedestal[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2013. 55(7):074006.

[142] P.B. Snyder, R.J. Groebner, J.W. Hughes, T.H. Osborne, M. Beurskens, A.W. Leonard, H.R. Wilson, X.Q. Xu. A first-principles predictive model of the pedestal height and width: development, testing and iter optimization with the eped model[J]. Nuclear Fusion, 2011. 51(10):103016.

[143] H. R. Wilson, P. B. Snyder, G. T. A. Huysmans, R. L. Miller. Numerical studies of edge localized instabilities in tokamaks[J]. Physics of Plasmas, 2002. 9(4):1277–1286. doi:10.1063/1.1459058.

[144] B.D. Dudson, M.V. Umansky, X.Q. Xu, P.B. Snyder, H.R. Wilson. Bout++: A framework for parallel plasma fluid simulations[J]. Computer Physics Communications, 2009. 180(9):1467 – 1480. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2009.03.008.

[145] X. Lapillonne, S. Brunner, T. Dannert, S. Jolliet, A. Marinoni, L. Villard, T. Gorler, F. Jenko, F. Merz. Clarifications to the limitations of the s-alpha equilibrium model for gyrokinetic computations of turbulence[J]. Physics of Plasmas, 2009. 16(3):032308. doi:10.1063/1.3096710.

[146] Zhihong Lin, S. Ethier, T. S. Hahm, W. M. Tang. Verification of gyrokinetic particle simulation of device size scaling of turbulent transport[J]. Plasma Science and Technology, 2012. 14(12):1125.

[147] Hua-Sheng Xie. Shifted circular tokamak equilibrium with application examples (unpublished), 2014.

[148] Steven C. Cowley, Mehmet Artun. Explosive instabilities and detonation in magnetohydrodynamics[J]. Physics Reports, 1997. 283(1):185. doi:10.1016/S0370-1573(96)00060-9.

[149] H. S. Zhang, Z. Lin, I. Holod. Nonlinear frequency oscillation of alfvén eigenmodes in fusion plasmas[J]. Phys. Rev. Lett., Jul 2012. 109:025001. doi:10.1103/PhysRevLett.109.025001.

[150] H. S. Zhang, Z. Lin, W. Deng, I. Holod, Z. X. Wang, Y. Xiao, W. L. Zhang. Nonlinear dynamics of beta-induced alfven eigenmode in tokamak[J]. Physics of Plasmas, 2013. 20(1):012510. doi:10.1063/1.4776698.

[151] Zhixuan Wang. Gyrokinetic Simulation of TAE in Fusion plasmas[D]. :University of California, Irvine, 2014.

[152] Stephen Jardin. Computational Methods in Plasma Physics[M]. CRC Press, 2010.

[153] F. Zonca. Ifts intensive course on advanced plasma physics, 2009.

[154] W. D. DHaeseleer, W. N. G. Hitchon, J. D. Callen, J. L. Shohet. Flux Coordinates and Magnetic Field Structure: A Guide to a Fundamental Tool of Plasma Theory[M]. Springer Series in Computational Physics. Springer, 1991.

作者简历

基本情况

谢华生，男，1987年11月14日出生于湖南衡阳。

教育状况

2006 年 9 月至 2010 年 7 月，浙江大学物理系，理学学士。

2010 年 9 月至 2015 年 9 月，浙江大学物理系，硕博连读，专业：等离子体物理。

联系方式

E-mail: huashengxie@gmail.com

在学期间主要研究成果

本学位论文直接相关论文

1. **H. S. Xie** and Y. Xiao, Parallel Equilibrium Current Effect on Existence of Reversed Shear Alfvén Eigenmodes, Physics of Plasmas, 2015, **22**, 022518. [15a]

2. **H. S. Xie** and Y. Xiao, Unconventional Ballooning Structures for Toroidal Drift Waves, Physics of Plasmas, 2015, **22**, 090703. [15b]

3. **H. S. Xie**, Y. Xiao, I. Holod, Z. Lin and E. Belli, Sensitivity of Ballooning Mode Instability to Tokamak Equilibrium Implementations, to submit.

4. **H. S. Xie**, Y. Xiao, Z. Lin and D. F. Kong, Gyrokinetic Simulations of the HL-2A Tokamak H-mode Edge Turbulence. I. Electrostatic Physics, to submit.

5. **H. S. Xie**, Y. Xiao and Z. Lin, Reverse Trend of Turbulent Transport in Strong Gradient Fusion Plasmas, to submit.

学术会议

1. **H. S. Xie** and Y. Xiao, Essential Tokamak Geometric Effects for Global Ballooning Mode Study, poster, 23rd ICNSP Conference, Beijing, Sep. 14-16, 2013. Also, 55th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, Nov. 11-15, 2013, Denver, Colorado, USA.

2. **H. S. Xie** and Y. Xiao, Gyrokinetic Simulation of HL-2A H-mode Turbulent Transports, poster, 56th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, Oct. 27-30, 2014, New Orleans, Louisiana, USA.

3. **H. S. Xie** and Y. Xiao, Non-conventional Ballooning Structures for Linear Drift Wave Eigenmode in the Pedestal, poster, International Sherwood Fusion Theory Conference, Mar. 16-18, 2015, New York, USA.

4. **H. S. Xie**, Y. Xiao and Z. Lin, Reverse Trend of Turbulent Transport in Strong Gradient Fusion Plasmas, invited oral, 9th West Lake International Symposium on Plasma Simulation, May. 18-21, 2015, Hangzhou, China.

其他论文

1. **H. S. Xie**, Generalized Plasma Dispersion Function: One-solve-all Treatment, Visualizations, and Application to Landau Damping, Physics of Plasmas, 2013, **20**, 092125. [13a]

2. **H. S. Xie**, Constant Residual Electrostatic Electron Plasma Mode in Vlasov-Ampere System, Physics of Plasmas, 2013, **20**, 112108. [13b]

3. **H. S. Xie**, PDRF: A General Dispersion Relation Solver for Magnetized Multi-fluid Plasma, Computer Physics Communications, 2014, **185**, 670 – 675. [14a]

4. W. Chen, Z. Qiu, X. T. Ding, **H. S. Xie**, L. M. Yu, X. Q. Ji, J. X. Li, Y. G. Li, J. Q. Dong, Z. B. Shi, Y. P. Zhang, J. Y. Cao, X. M. Song, S. D. Song, M. Xu, Q. W. Yang, Yi. Liu, L. W. Yan, X. R. Duan and HL-2A team, Observation and Theory of Nonlinear Mode Couplings between Shear Alfvén Wave and Magnetic Island in Tokamak Plasmas, EPL, 2014, **107**, 25001. [14b]

5. **H. S. Xie**, J. Zhu and Z. W. Ma, Darwin Model in Plasma Physics Revisited, Physica Scripta, 2014, **89**, 105602. [14c]

6. W. Chen, LiMin Yu, Yi. Liu, X.T. Ding, **H. S. Xie**, J. Zhu, L.M. Yu, X.Q. Ji, J.X. Li, Y.G. Li, D.L. Yu, Z.B. Shi, X.M. Song, J.Y. Cao, S.D. Song, Y.B. Dong, W.L. Zhong, M. Jiang, Z.Y. Cui, Y. Huang, Y. Zhou, J.Q. Dong, M. Xu, F. Xia, L.W. Yan, Q.W. Yang, X.R. Duan and the HL-2A Team, Destabilization of Reversed Shear Alfven Eigenmodes Driven by Energetic Ions During NBI in HL-2A Plasmas with $q_{\min} \sim 1$, Nuclear Fusion, 2014, **54**, 104002. [14d]

7. **H. S. Xie** and Y. Xiao, PDRK: A General Kinetic Dispersion Relation Solver for Magnetized Plasma, Plasma Science and Technology (accept), arXiv:1410.2678.

8. J. Q. Dong, J. Cheng, L. W. Yan, Z. X. He, K. Itoh, **H. S. Xie**, Y. Xiao, K. J. Zhao, W. Y. Hong, Z. H. Huang, L. Nie, S.-I. Itoh, W. L. Zhong, D. L. Yu, X. Q. Ji,Y. Huang, X. M. Song, Q. W. Yang, X. T. Ding, X. L. Zou, X. R. Duan, Yong Liu and HL-2A Team, Mechanism of Low-intermediate-high Confinement Transitions in Tokamaks, submitted.

9. W. Chen, L. M. Yu, X. T. Ding, **H. S. Xie**, Z. B. Shi, X. Q. Ji, D. L. Yu, Y. P. Zhang, P. W. Shi, Y. G. Li, B. B. Feng, M. Jiang, W. L. Zhong, J. Y. Cao, X. M. Song, M. Xu, Y. H. Xu, L. W. Yan, Yi. Liu, Q. W. Yang, X. R. Duan and HL-2A Team, Core-localized Alfvénic Modes Driven by Energetic-ions in the HL-2A NBI Plasmas with Weak Magnetic Shears, submitted.